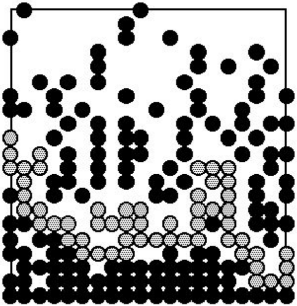
Universalité de certaines interfaces aléatoires : Inhomogénéité et SLE(6)

Pierre Nolin
(Courant Institute)

31 Août 2010

Inhomogénéité et universalité

Systèmes physiques pour lesquels l'inhomogénéité joue un rôle central : modèles de fronts de diffusion par exemple (Gouyet, Rosso, Sapoval, 1985).



(Fig. J.F. Gouyet)

Inhomogénéité et universalité

- Interface fractale, de dimension $D_f = 1.76 \pm 0.02$.

Inhomogénéité et universalité

- Interface fractale, de dimension $D_f = 1.76 \pm 0.02$.
- Interface localisée où $p(z)$ (densité de particules au site z) est proche de p_c (paramètre critique de percolation).

Inhomogénéité et universalité

- Interface fractale, de dimension $D_f = 1.76 \pm 0.02$.
- Interface localisée où $p(z)$ (densité de particules au site z) est proche de p_c (paramètre critique de percolation).
- Divers exposants critiques (amplitude des fluctuations, longueur…) qui semblent liés à ceux de la percolation usuelle : par exemple, $D_f \simeq 7/4$ est la dimension des interfaces pour la percolation en régime critique.

Inhomogénéité et universalité

- Pour les simulations, approximation que les statuts des différents sites (occupés / vacants) sont indépendants les uns des autres

  $\rightsquigarrow$ processus de percolation inhomogène de paramètre $p(z)$: modèle de *percolation en gradient*.

Inhomogénéité et universalité

- Pour les simulations, approximation que les statuts des différents sites (occupés / vacants) sont indépendants les uns des autres

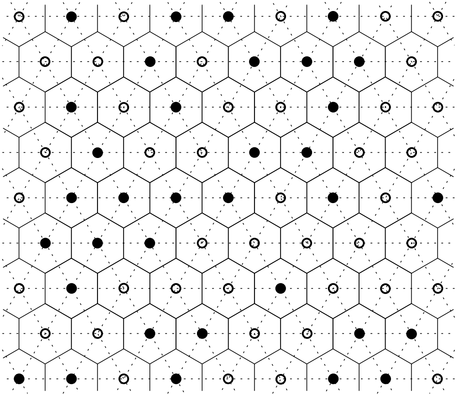
  $\rightsquigarrow$ processus de percolation inhomogène de paramètre $p(z)$: modèle de *percolation en gradient*.

- Ici :
  - étude de la percolation en gradient.
  - $\Rightarrow$ propriétés des fronts de diffusion.

Percolation presque-critique

Percolation par sites

Percolation par sites sur le *réseau triangulaire* :



Percolation par sites

$\rightsquigarrow$ images de ce type :

Existence d'une transition de phase à $p_c = 1/2$

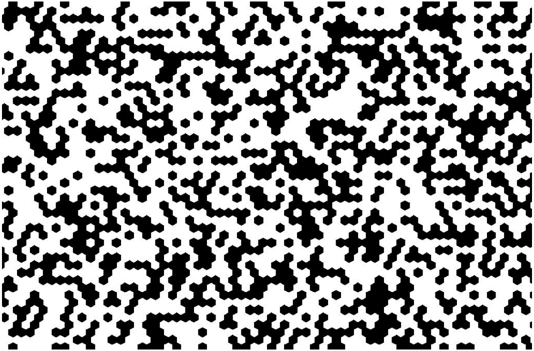
La percolation possède une *transition de phase*, à $p_c = 1/2$ sur le réseau triangulaire :

- Si $p < 1/2$: pas d'amas infini (régime *sous-critique*),
- Si $p > 1/2$: un *unique* amas infini (régime *sur-critique*).

Si $p = 1/2$: régime *critique*, pas de cluster infini.

Régime sous-critique

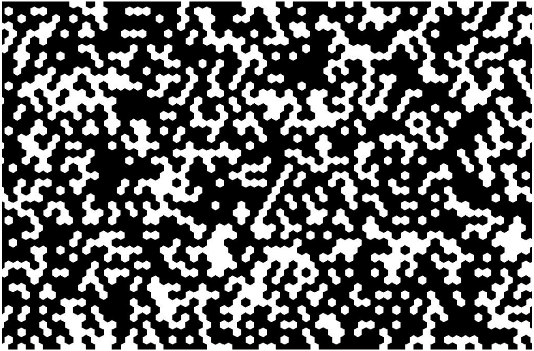
En régime *sous-critique* ($p < 1/2$),



$\rightsquigarrow$ **longueur caractéristique** $\xi(p)$.

Régime sur-critique

En régime *sur-critique* ($p > 1/2$),



Régime critique

Au point critique $p = p_c = 1/2$, “pas de longueur caractéristique” :

Percolation presque-critique

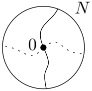
Deux ingrédients principaux :

(1) Étude de la percolation critique (Lawler, Schramm, Smirnov, Werner, 1999–2001)

(2) Techniques de renormalisation (Kesten, 1987)

$\Rightarrow$ Description de la percolation près du point critique.

Percolation presque-critique

$p = p_c$ [régime critique] e.g. $\mathbb{P}_{p_c}\Big($ 

$\Big) = N^{-5/4+o(1)}$ $(N \to \infty)$

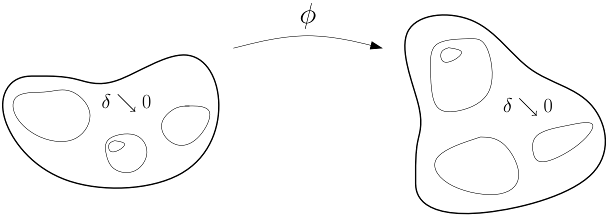
renormalisation
(Kesten 1987)

$p \simeq p_c$ [régime presque-critique] e.g. $\xi(p) = |p - p_c|^{-4/3+o(1)}$ $(p \to p_c)$

Invariance conforme au point critique

Limites d'échelle : limites continues, pour $\delta \searrow 0$.

Comment y donner un sens ? **interfaces** par exemple.

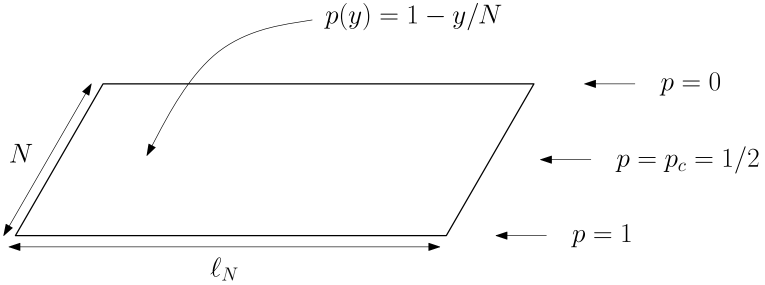


$\rightsquigarrow$ décrites par SLE(6).

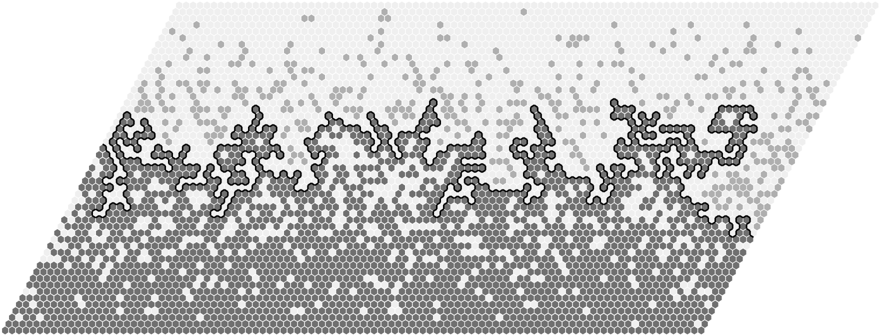
Application : géométrie des fronts de diffusion

Percolation en gradient

Bande $[0, \ell_N] \times [0, N]$, paramètre de percolation $p(y)$ décroissant linéairement en y :

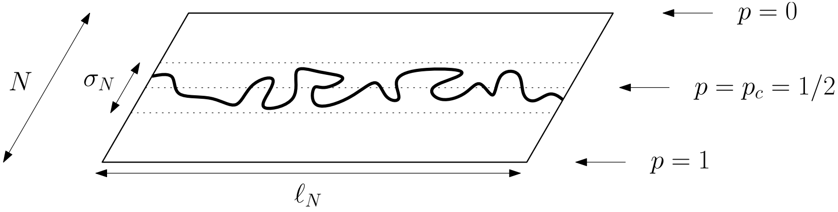


Percolation en gradient



Heuristique

Localisation dans une “bande critique” autour de $p = p_c = 1/2$: bande dans laquelle la percolation est presque-critique.



Heuristique

Pour la largeur σ_N de la bande critique,

$$\sigma_N = \xi(1/2 \pm \sigma_N/2N).$$

Comme $\xi(p) = |p - 1/2|^{-4/3+o(1)}$ $(p \to 1/2)$,

$$\sigma_N = (\sigma_N/2N)^{-4/3+o(1)},$$

d'où

$$\sigma_N = N^{4/7+o(1)}.$$

Longueur du front

Pour la longueur L_N de l'interface :

$$L_N \approx (\sigma_N)^{D_f} \times \left(\ell_N / \sigma_N\right)$$

Comme $\sigma_N \approx N^{4/7}$ et $D_f = 7/4$,

$$L_N \approx (N^{4/7})^{7/4} \times \left(\ell_N / N^{4/7}\right) = N^{3/7} \ell_N.$$

Asymétrie discrète

Mais on a aussi :

Proposition

Pour une boîte de taille $\sigma_N/2$ à hauteur $N/2+\sigma_N$: elle contient $\approx (N^{4/7})^{7/4} = N$ sites sur le front, mais

$$\mathbb{E}\Big[\#\textit{sites blancs} - \#\textit{sites noirs}\Big] \approx N^{4/7} \gg \sqrt{N}.$$

$\rightsquigarrow$ A la limite d'échelle, différent du regime critique : l'interface tourne plus d'un côté.

Description du modèle

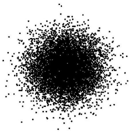
- On commence à l'instant $t = 0$ avec un grand nombre n de particules situées à l'origine,
- et on les laisse faire des marches aléatoires indépendantes.

A chaque instant t, sites occupés $=$ contenant au moins une particule (regroupés en amas).

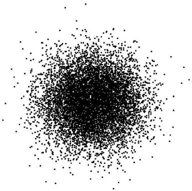
Évolution pour $n = 10000$ particules : $t = 10$

Évolution pour $n = 10000$ particules : $t = 100$

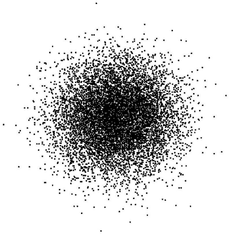
Évolution pour $n = 10000$ particules : $t = 500$



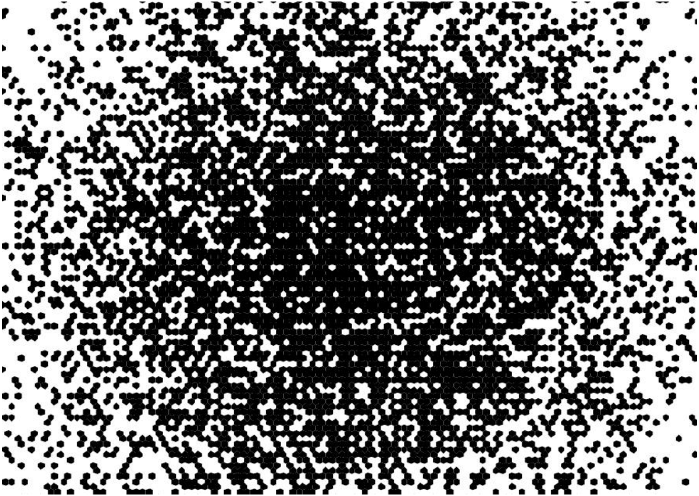
Évolution pour $n = 10000$ particules : $t = 1000$



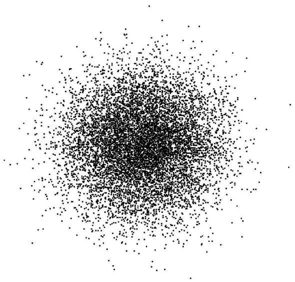
Évolution pour $n = 10000$ particules : $t = 1463 = \lambda_{\max} n$



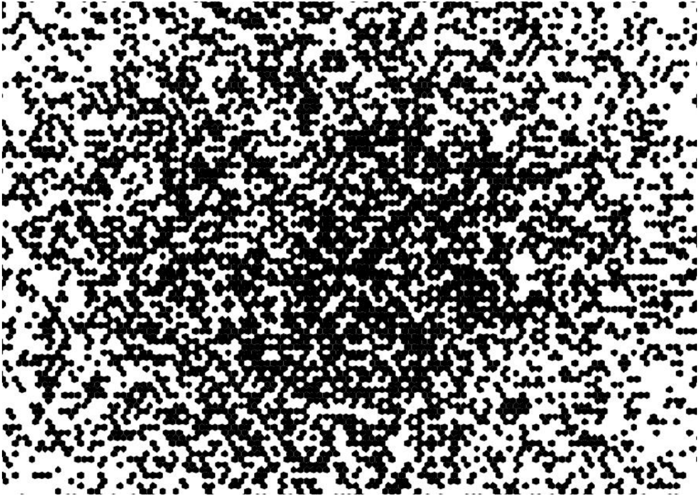
$t = 1463 = \lambda_{\max} n$ (zoom)



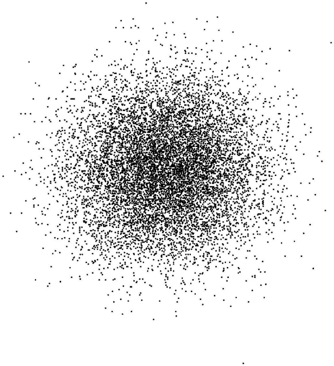
Évolution pour $n = 10000$ particules : $t = 2500$



$t = 2500$ (zoom)

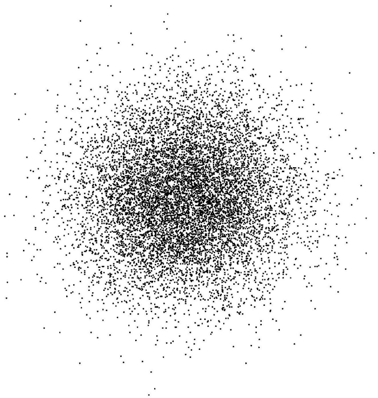


Évolution pour $n = 10000$ particules : $t = 3977 = \lambda_c n$

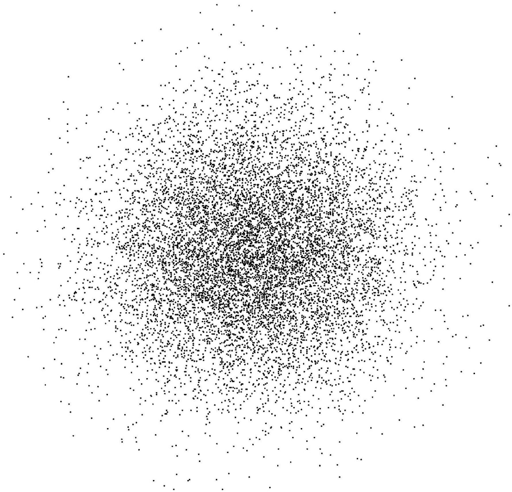


$t = 3977 = \lambda_c n$ (zoom)

Évolution pour $n = 10000$ particules : $t = 5000$



Évolution pour $n = 10000$ particules : $t = 10000$



$t = 10000$ (zoom)

Approximation poissonienne

Probabilité d'occupation d'un site z :

$$p(z) = 1 - (1 - \pi_t(z))^n \simeq 1 - e^{-n\pi_t(z)}.$$

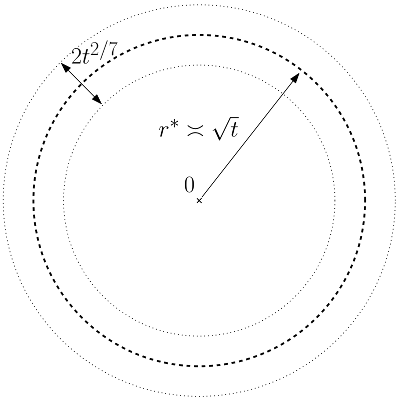
C'est égal à $p_c = 1/2$ pour

$$\|z\| = \sqrt{t \log \frac{\lambda_c}{t/n}}$$

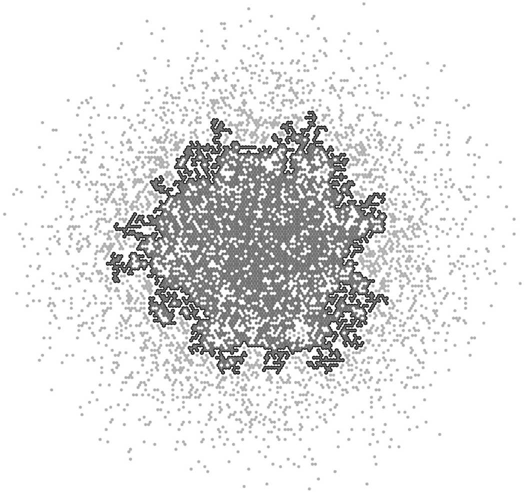
si $t \leq \lambda_c n$, avec $\lambda_c = \sqrt{3}/2\pi \log 2$ (et cela reste $< 1/2$ sinon).

Approximation poissonienne

$\approx$ percolation en gradient localement : frontière localisée dans un anneau de largeur $\approx (\sqrt{t})^{4/7} = t^{2/7}$ autour de $r = r^* \asymp \sqrt{t}$.



Géométrie : cas $\lambda < \lambda_c$



Géométrie : cas $\lambda < \lambda_c$

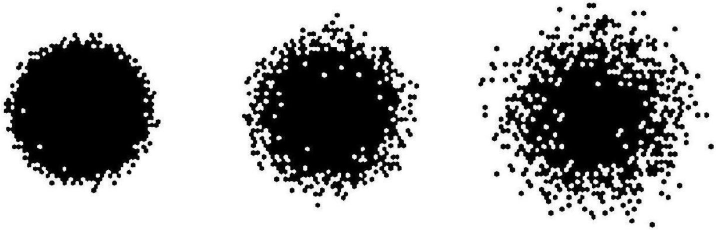
Théorème (N.)

Considérons $t_n = \lambda n$, avec $\lambda < \lambda_c$: avec probabilité tendant vers 1 lorsque $n \to \infty$,

- *unique interface macroscopique autour de 0,*
- *localisée dans un anneau de largeur $\approx t^{2/7}$ autour de $r = r^*(\lambda) = c(\lambda)\sqrt{t}$,*
- *dimension fractale $7/4$, longueur $\approx t^{5/7}$.*

Modèles avec exclusion

Modèles avec exclusion ?



Inhomogénéité et universalité : conclusion

Conclusion :

1. Dans les modèles physiques où la transition de phase de la percolation intervient, on observe un régime "presque-critique", plutôt qu'exactement le régime critique.

Inhomogénéité et universalité : conclusion

Conclusion :

1. Dans les modèles physiques où la transition de phase de la percolation intervient, on observe un régime "presque-critique", plutôt qu'exactement le régime critique.

2. $\Rightarrow$ Résultats positifs et négatifs :

   - similarités avec la percolation critique (dimension fractale, exposants. . .).
   - différences (asymétrie locale) : pas la même classe d'universalité.

The end

Merci !