Grandes déviations précises pour des processus de Ornstein Uhlenbeck Fractionnaires.

Bernard BERCU[1], Laure COUTIN[2] et **Nicolas SAVY**[2]

[1]Université de Bordeaux 1.
Institut de Mathématiques de Bordeaux.

[2]Université Paul Sabatier - Toulouse.
Institut de Mathématiques de Toulouse.

Le 01 septembre 2010

Position du problème

Etablir un principe de Grandes déviations précises pour des fonctionnelles associées à un processus de Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire.

Définition

$$dX_t = \theta X_t dt + dW_t^H \tag{1}$$

avec

- $X_0 = 0$,
- $\theta < 0$
- (W_t^H) *un MBF de paramètre* $0 < H < 1$.
  Processus Gaussien, continu, centré vérifiant

$$\mathbb{E}\left[W_t^H W_s^H\right] = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

Retour

Fonctionnelles d'intérêt

Les fonctionnelles intéressantes sont :

- L'énergie

$$S_T = \int_0^T X_t^2 \, dt.$$

- L'estimateur par Maximum de Vraissemblance de θ

$$\widehat{\theta}_T = \frac{\text{''} \int_0^T X_t \, dX_t \text{''}}{\int_0^T X_t^2 \, dt}.$$

Retour

Retour

Principe de Grandes Déviations

Définition

On dit qu'une famille de V.A.R. (Z_T) satisfait un P.G.D. de bonne fonction de taux I s'il existe une fonction I s.c.i. de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty]$ telle que, pour tout $c \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P}(Z_T \geq c) = -I(c), \quad si\ c \geq \mathbb{E}[Z_T]$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P}(Z_T \leq c) = -I(c) \quad si\ c \leq \mathbb{E}[Z_T]$$

I est la transformée de Fenchel-Legendre de $\mathcal{L}$ la limite de la log-Laplace de Z_T.

$\mathcal{L}_T(a,b)$ désigne la log-laplace de $Z_T(a,b)$.

Lemme

Le domaine de la limite $\mathcal{L}$ de $\mathcal{L}_T$ est

$$\Delta_H = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \theta^2 - 2b > 0 \textit{ and } \sqrt{\theta^2 - 2b} > \max(a+\theta; -\delta_H(a+\theta))\right\}$$

Pour (a,b) dans l'intérieur de Δ_H, on a la décomposition suivante :

$$\mathcal{L}_T(a,b) = \mathcal{L}(a,b) + \frac{1}{T}\mathcal{H}(a,b) + \frac{1}{T}\mathcal{K}_T(a,b) + \frac{1}{T}\mathcal{R}_T(a,b)$$

$$\mathcal{L}(a,b) \quad = \quad -\frac{1}{2}(a+\theta+\varphi(b)), \qquad \mathcal{H}(a,b) = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{\tau(a,b)}{2\varphi(b)}\right),$$

$$\varphi(b) = \sqrt{\theta^2 - 2b} \qquad \textit{et} \qquad \tau(a,b) = \varphi(b) - (a+\theta),$$

Retour Retour Retour

Le reste du lemme principal

Lemme

$$\mathcal{K}_T(a,b) = -\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{(2\varphi(b)-\tau(a,b))}{2\varphi(b)}r_T(b)\right).$$

$$r_T(b) = r_H(\varphi(b)T/2)\exp(-T\varphi(b)) - 1$$

avec I_H est la fonction de Bessel de première espèce modifiée quant à r_H elle est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|\arg z| < \pi$ par

$$r_H(z) = \frac{\pi z}{\sin(\pi H)}\Big(I_H(z)I_{1-H}(z) + I_{-H}(z)I_{H-1}(z)\Big).$$

Le reste est

$$\mathcal{R}_T(a,b) = -\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{(2\varphi(b)-\tau(a,b))^2}{\tau(a,b)(2\varphi(b)+r_T(b)(2\varphi(b)-\tau(a,b)))}e^{-2T\varphi(b)}\right).$$

Théorème

La suite (S_T/T) satisfait un PGD de bonne fonction de taux

$$I(c) = \begin{cases} \dfrac{(2\theta c+1)^2}{8c} \text{ if } 0 < c \leq -\dfrac{1}{2\theta\delta_H}, \\ \dfrac{c\theta^2}{2}(1-\delta_H^2) + \dfrac{\theta}{2}(1-\delta_H) \text{ if } c \geq -\dfrac{1}{2\theta\delta_H}, \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

δ_H est une constante nulle pour $H = 1/2$ et le LDP est exactement celui établi par Bryc and Dembo.

Retour 1

Retour 2

PGD pour $(\widehat{\theta}_T)$

Théorème

La suite $(\widehat{\theta}_T)$ satisfait un PGD de bonne fonction de taux

$$I(c) = \begin{cases} -\dfrac{(c-\theta)^2}{4c} & \text{if } \ c < \dfrac{\theta}{3}, \\[2ex] 2c-\theta & \text{if } \ c \geq \dfrac{\theta}{3}. \end{cases}$$

C'est le même PGD que celui établi par Florens-Landais et Pham pour $H = 1/2$.

Théorème

Pour $-1/(2\theta) < c < -1/(2\theta\delta_H)$, la suite (S_T/T) satisfait un PGDP, il existe une suite $(b^H_{c,k})$ telle que, pour tout $p > 0$ et T suffisamment grand,

$$\mathbb{P}(S_T \geq cT) = \frac{\exp(-TI(c) + J(c) + K_H(c))}{a_c \sigma_c \sqrt{2\pi T}} \left[1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{b^H_{c,k}}{T^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^{p+1}}\right)\right]$$

Pour $0 < c < -1/(2\theta)$,

$$\mathbb{P}(S_T \leq cT) = -\frac{\exp(-TI(c) + J(c) + K_H(c))}{a_c \sigma_c \sqrt{2\pi T}} \left[1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{b^H_{c,k}}{T^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^{p+1}}\right)\right]$$

où $J(c)$, $K_H(c)$, a_c et σ_c sont des constantes.

Retour

PGDP pour (S_T/T), cas 2.

Théorème

Pour $c > -1/(2\theta\delta_H)$ la suite (S_T/T) satisfait un PGDP, il existe une suite $(d_{c,k}^H)$ telle que, pour tout $p > 0$ et T suffisamment grand,

$$\mathbb{P}(S_T \geq cT) = \frac{\exp(-TI(c) + P_H(c) + Q_H(c))}{a_H \sigma_H \sqrt{2\pi T}} \left[1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{d_{c,k}^H}{T^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^{p+1}}\right)\right]$$

où $P_H(c)$, $Q_H(c)$, a_H et σ_H sont des constantes.

PGDP pour (S_T/T), cas 3.

Théorème

Pour $c = -1/(2\theta\delta_H)$ la suite (S_T/T) satisfait un PGDP, il existe une suite (d_k^H) telle que, pour tout $p > 0$ et T suffisamment grand,

$$\mathbb{P}(S_T \geq cT) = \frac{\exp(-TI(c) + K_H)\Gamma(1/4)}{2\pi a_H \sigma_H T^{1/4}} \left[1 + \sum_{k=1}^{2p} \frac{d_k^H}{(\sqrt{T})^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^p\sqrt{T}}\right)\right]$$

où K_H, a_H et σ_H sont des constantes.

Théorème

Pour $\theta < c < \theta/3$, $(\hat{\theta}_T)$ satisfait un PDGP, il existe une suite $(b^H_{c,k})$ telle que, pour tout $p > 0$ et T suffisamment grand,

$$\mathbb{P}(\hat{\theta}_T \geq c) = \frac{\exp(-TI(c) + J(c) + K_H(c))}{\sigma_c a_c \sqrt{2\pi T}} \left[1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{b^H_{c,k}}{T^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^{p+1}}\right)\right]$$

Pour $c < \theta$,

$$\mathbb{P}(\hat{\theta}_T \leq c) = -\frac{\exp(-TI(c) + J(c) + K_H(c))}{\sigma_c a_c \sqrt{2\pi T}} \left[1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{b^H_{c,k}}{T^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^{p+1}}\right)\right]$$

où $J(c)$, $K_H(c)$, a_c et σ_c sont des constantes.

PGDP pour $(\widehat{\theta}_T)$ cas 1.

Théorème

Pour $c > \theta/3$ et $c \neq 0$, $(\hat{\theta}_T)$ satisfait un PDGP, il existe une suite $(d^H_{c,k})$ telle que, pour tout $p > 0$ et T suffisamment grand,

$$\mathbb{P}(\hat{\theta}_T \geq c) = \frac{\exp(-TI(c) + P(c))\sqrt{\sin(\pi H)}}{\sigma^c a^c \sqrt{2\pi T}} \left[1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{d^H_{c,k}}{T^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^{p+1}}\right)\right]$$

où $P(c)$, σ^c et a^c sont des constantes.

PGDP pour $(\widehat{\theta_T})$ cas 1.

Théorème

Pour $c = 0$, $(\hat{\theta}_T)$ satisfait un PDGP, il existe une suite (d_k^H) telle que, pour tout $p > 0$ et T suffisamment grand,

$$\mathbb{P}(\hat{\theta}_T \geq 0) = 2\,\frac{\exp(-TI(c))\sqrt{\sin(\pi H)}}{\sqrt{2\pi T}\sqrt{-2\theta}}\left[1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{d_k^H}{T^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^{p+1}}\right)\right].$$

Théorème

Pour $c = \theta/3$, $(\hat{\theta}_T)$ satisfait un PDGP, il existe une suite (d_k^H) telle que, pour tout $p > 0$ et T suffisamment grand,

$$\mathbb{P}(\hat{\theta}_T \geq \frac{\theta}{3}) = \frac{\exp(-TI(c))\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4\pi T^{1/4}\, a_\theta^{3/4}\, \sigma_\theta}\sqrt{\sin(\pi H)}\left[1 + \sum_{k=1}^{2p} \frac{e_k^H}{(\sqrt{T})^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^p\sqrt{T}}\right)\right]$$

où a_θ et σ_θ sont des constantes.

Quelques points de la démonstration

- Transformation du problème pour contourner le calcul stochastique relativement à (W^H) et se ramener à des martingales Gaussiennes. Voir cette page
- Construction du domaine Δ_H Voir cette page.
- Caractérisations des différents cas du PGD pour l'energie Voir cette page.
- Idée générale de la preuve du PGDP pour l'energie Voir cette page.

Considérons pour $0 < s < t$,

$$w(t,s) = w_H^{-1} s^{-H+1/2}(t-s)^{-H+1/2}$$

Norros a montré que pour $t > 0$,

$$M_t = \int_0^t w(t,s)\, dW_s^H.$$

est une martingale Gaussienne de variation quadratique

$$<M>_t = \lambda_H^{-1} t^{2-2H}$$

On a alors en utilisant Kleptsyna et Le Breton Voir cette page

$$(1) \iff Y_t = \int_0^t w(t,s)\, dX_s = \theta \int_0^t w(t,s) X_s\, ds + M_t,$$

$$\iff Y_t = \theta \int_0^t Q_s\, d{<M>_s} + M_t,$$

avec $$Q_t = \frac{l_H}{2}\left(t^{2H-1} Y_t + \int_0^t s^{2H-1}\, dY_s\right)$$

Martingales Gaussiennes associées

La fonction de score (dérivée de la fonction de log-vraissemblance) est alors donnée par

$$\Sigma_T(\theta) = \int_0^T Q_t \, dY_t - \theta \int_0^T Q_t^2 \, d{<}M{>}_t \; .$$

L'énergie s'ecrit alors

$$S_T = \int_0^T Q_t^2 \, d{<}M{>}_t$$

et l'estimateur du maximum de vraissemblance de θ, par

$$\widehat{\theta}_T = \frac{\int_0^T Q_t \, dY_t}{\int_0^T Q_t^2 \, d{<}M{>}_t}.$$

Construction de domaine Δ_H

Pour montrer un PGD pour S_T et $\widehat{\theta}_T$ le bon outils est la log-laplace. Ici, nous pouvons traiter les 2 cas en un seul en considérant

$$\mathcal{L}_T(a,b) = \frac{1}{T} \log \mathbb{E}\left[\exp(Z_T(a,b))\right]$$

où pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}$,

$$Z_T(a,b) = a \int_0^T Q_t \, dY_t + b \int_0^T Q_t^2 \, d{<}M{>}_t \ .$$

En effet, il est facile de voir que

$$\mathbb{P}(S_T \leq cT) = \mathbb{P}(Z_T(0,a) \leq acT).$$

et que

$$\mathbb{P}(\widehat{\theta}_T \leq c) = \mathbb{P}(Z_T(a,-ac) \leq 0).$$

Construction de domaine Δ_H

D'ou viennent les contraintes définissant Δ_H ?
Par Girsanov, on a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_T(a,b) &= \frac{1}{T}\log \mathbb{E}\left[\exp\left(a\int_0^T Q_t\,dY_t + bS_T\right)\right], \\
&= \frac{1}{T}\log \mathbb{E}_\varphi\left[\exp\left((a+\theta-\varphi)\int_0^T Q_t\,dY_t + \frac{1}{2}(2b-\theta^2+\varphi^2)S_T\right)\right]
\end{aligned}
$$

pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$, où $\mathbb{E}_\varphi$ est l'espérance sous la nouvelle probabilité.
Si $\theta^2 - 2b > 0$, on peut choisir $\varphi = \sqrt{\theta^2 - 2b}$ et $\tau = \varphi - (a+\theta)$ et écrire Voir cette page

$$\mathcal{L}_T(a,b) = \frac{1}{T}\log \mathbb{E}_\varphi\left[\exp\left(-\tau\int_0^T Q_t\,dY_t\right)\right].$$

qui par Itô $\int_0^T Q_t\,dY_t = \frac{1}{2}\left(l_H Y_T \int_0^T t^{2H-1}\,dY_t - T\right)$ et on a :

$$\mathcal{L}_T(a,b) = \frac{\tau}{2} + \frac{1}{T}\log \mathbb{E}_\varphi\left[\exp\left(-\frac{\tau l_H}{2} Y_T \int_0^T t^{2H-1}\,dY_t\right)\right].$$

Construction de domaine Δ_H

Sous $\mathbb{P}_\varphi$, le couple $(Y_T, \int_0^T t^{2H-1}\, dY_t)$ est Gaussien centré de matrice de covariance $\Gamma_T(\varphi)$. Dans ce cas, on montre que

$$\mathcal{L}_T(a,b) = \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2T} \log\det(M_T(a,b)).$$

où

$$M_T(a,b) = I + \frac{\tau I_H}{2} \Gamma_T^{1/2}(\varphi) J \Gamma_T^{1/2}(\varphi)$$

avec

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

si cette matrice est semi définie positive.

Voir cette page

Caractérisation des cas pour l'énergie

Dans la suite de l'exposé nous travaillerons avec l'énergie.

$$Z_T(a) = Z_T(0, a)$$

Dans ce cas, nous avons,

$$\Delta_H =]-\infty; a_H[\qquad \textit{avec} \qquad a_H = \frac{\theta^2}{2}(1 - \delta_H^2)$$

La condition suffisante pour montrer un PGD (Théorème de Gärtner-Ellis) : $\mathcal{L}$ steep (dérivée infinie au bord du domaine) n'est pas satisfaite ici. En effet

$$\mathcal{L}'(a) = \frac{1}{2\sqrt{\theta^2 - 2a}} \qquad \textit{donc} \qquad \mathcal{L}'(a_H) = -\frac{1}{2\theta\delta_H}$$

On rappelle que

$$I(c) = \sup_{a \in \mathbb{R}} \Psi(a, c) \qquad \textit{avec} \qquad \Psi(a, c) = ca - \mathcal{L}(a).$$

$$\Psi'(a,c) = 0 \iff a = a_c = \frac{4\theta^2 c^2 - 1}{8c^2}.$$

Le sup est atteint ssi $a_c \in \Delta_H$ c'est à dire ssi $0 < c < -1/(2\theta\delta_H)$, c'est le cas facile.

Sinon, le sup n'est pas atteint dans le domaine et c'est plus compliqué.

Voir cette page

$$I(c) = \begin{cases} \Psi(a_c, c) \text{ if } \; 0 < c \leq -\dfrac{1}{2\theta\delta_H}, \\[2ex] \Psi(a_H, c) \text{ if } \; c \geq -\dfrac{1}{2\theta\delta_H}, \\[2ex] \lim\limits_{a \to -\infty} \Psi(a,c) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Idée de la preuve du PGDP pour l'énergie

Dans le cas facile, $a_c \in \Delta_H$. L'idée de la preuve est de couper $\mathbb{P}(S_T \geq cT) = A_T B_T$ avec

$$\begin{aligned} A_T &= \exp(T(L_T(a_c) - ca_c)), \\ B_T &= \mathbb{E}_T\Big[\exp(-a_c(S_T - cT))\mathbb{1}_{S_T \geq cT}\Big], \end{aligned}$$

où $\mathbb{E}_T$ est l'espérance sous la nouvelle probabilité définie par :

$$\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}} = \exp\Big(a_c S_T - TL_T(a_c)\Big).$$

Pour A_T, on a facilement *via* le développement de $L_T(a_c)$,

$$A_T = \exp(-TI(c) + J(c) + K_H(c)) \left[1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k}{T^k} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{T^{p+1}}\Big)\right]$$

Idée de la preuve du PGDP pour l'énergie

Pour B_T, on écrit

$$B_T = \mathbb{E}_T\left[\exp(-a_c\sigma_c\sqrt{T}U_T)\mathbb{1}_{U_T\geq 0}\right]$$

avec

$$U_T = \frac{S_T - cT}{\sigma_c\sqrt{T}}.$$

et on montre que :

Lemme

La distribution de U_T sous $\mathbb{P}_T$ converge,vers une distribution $\mathcal{N}(0,1)$. De plus on a :

$$B_T = \frac{\beta_0}{\sqrt{T}}\left[1 + \sum_{k=1}^{p}\frac{\beta_k}{T^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^{p+1}}\right)\right].$$

Idée de la preuve du PGDP pour l'énergie

Idée de la preuve du Lemme :
On considère Φ_T la fonction caractéristique de U_T sous $\mathbb{P}_T$.

- Convergence en loi : développement de Φ_T.
- Développement de B_T : par la formule de Parseval, on montre que B_T s'écrit

$$B_T = \frac{1}{2\pi a_c \sigma_c \sqrt{T}} \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \frac{iu}{a_c \sigma_c \sqrt{T}}\right)^{-1} \Phi_T(u) du.$$

On choisit s_T et on coupe $B_T = C_T + D_T$ avec

$$\begin{aligned} C_T &= \frac{1}{2\pi a_c \sigma_c \sqrt{T}} \int_{|u| \leq s_T} \left(1 + \frac{iu}{a_c \sigma_c \sqrt{T}}\right)^{-1} \Phi_T(u) du, \\ D_T &= \frac{1}{2\pi a_c \sigma_c \sqrt{T}} \int_{|u| > s_T} \left(1 + \frac{iu}{a_c \sigma_c \sqrt{T}}\right)^{-1} \Phi_T(u) du. \end{aligned}$$

On montre que D_T ne contribue pas et pour C_T c'est du calcul.

Idée de la preuve du PGDP pour l'énergie

Dans les cas difficile, $a_c \notin \Delta_H$.
L'idée de la preuve est de montrer l'existence d'une famille $a_T \in \Delta_H$ telle que $a_T \to a_H$ de plus on montre qu'il existe une suite (a_k) telle que, pour tout $p > 0$ et T suffisamment grand,

$$a_T = \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{T^k} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{T^{p+1}}\Big).$$

Ensuite on coupe $\mathbb{P}(S_T \geq cT) = A_T B_T$ avec

$$\begin{aligned} A_T &= \exp\left(TL_T(a_T) - cTa_T\right), \\ B_T &= \mathbb{E}_T\Big[\exp(-a_T(S_T - cT))\mathbb{1}_{S_T \geq cT}\Big]. \end{aligned}$$

où $\mathbb{E}_T$ est l'espérance sous la nouvelle probabilité définie par :

$$\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}} = \exp\Big(a_T S_T - TL_T(a_T)\Big).$$

Idée de la preuve du PGDP pour l'énergie

Pour A_T, on a facilement *via* le développement de $L_T(a_T)$,

$$A_T = \exp(-TI(c) + R_H(c))\delta_H \sqrt{2e\theta T \sin(\pi H)(1+2\theta c\delta_H)} \left[1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_k}{T^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^{p+1}}\right)\right]$$

Pour B_T, on écrit

$$B_T = \mathbb{E}_T\left[\exp(-a_T T U_T)\mathbb{1}_{U_T \geq 0}\right] \qquad \textit{avec} \qquad U_T = \frac{S_T - cT}{T}.$$

et on montre que :

Lemme

La distribution de U_T sous $\mathbb{P}_T$ converge,vers une distribution $\nu_H N^2 - \gamma_H$ où N suit une distribution $\mathcal{N}(0,1)$. De plus on a :

$$B_T = \sum_{k=1}^{p} \frac{\beta_k}{T^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^{p+1}}\right).$$

Idée de la preuve du PGDP pour l'énergie

La fonction caractéristique de la loi limite est :

$$\Phi(u) = \frac{\exp(-i\gamma_H u)}{\sqrt{1 - 2i\nu_H u}}.$$

Le lemme se démontre en utilisant le résultat suivant :

Lemme

$f_{a,b}$ la densité d'une loi $\mathcal{G}(a,b)$ $a, b > 0$. Pour tout $k, \ell \geq 0$, tout σ^2, γ, ν réels positifs, on pose

$$v_k(a,b,\ell) = \frac{2\pi\sigma^{2k} i^\ell}{2^k k! \gamma^{2k+\ell+1}} f_{a,b}^{(2k+\ell)}(1).$$

Alors pour tout entier $p > 0$ et $\ell \geq 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-i\gamma u - \frac{\sigma^2 u^2}{2T}\right) \frac{u^\ell}{(1-2i\nu u)^a}\, du = \sum_{k=0}^{p} \frac{v_k(a,b,\ell)}{T^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^{p+1}}\right)$$

with $b = \gamma/(2\nu)$.

Enfin dans le cas d'égalité, nous sommes toujours dans le cas difficile, $a_c \notin \Delta_H$.
L'idée est identique mais le développement des a_T est :

$$a_T = \sum_{k=0}^{2p} \frac{a_k}{(\sqrt{T})^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^p\sqrt{T}}\right)$$

Ensuite on coupe $\mathbb{P}(S_T \geq cT) = A_T B_T$ de la même manière, cela nous conduit au développement :

$$A_T = \exp(-TI(c))(-\theta\delta_H eT)^{1/4}\sqrt{2\delta_H \sin(\pi H)}\left[1 + \sum_{k=1}^{2p} \frac{\alpha_k}{(\sqrt{T})^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^p\sqrt{T}}\right)\right]$$

Pour ce qui est de B_T, il faut l'écrire :

$$B_T = \mathbb{E}_T\left[\exp(-a_T\sqrt{T}U_T)\mathbb{1}_{U_T \geq 0}\right]$$

avec

$$U_T = \frac{S_T - cT}{\sqrt{T}}.$$

Idée de la preuve du PGDP pour l'énergie

Lemme

La distribution de U_T sous $\mathbb{P}_T$ converge vers la distribution de $\sigma_H N_1 + \nu_H (N_2^2 - 1)$ où N_1 et N_2 sont deux variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

$$\Phi(u) = \frac{\exp\left(-i\eta_H u - \frac{u^2\sigma_H^2}{2}\right)}{\sqrt{1 - 2i\eta_H u}}.$$

De plus on a :

$$B_T = \sum_{k=1}^{2p} \frac{\beta_k}{(\sqrt{T})^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T^p\sqrt{T}}\right)$$