Quasi-potentiel pour l'exclusion simple asymétrique

Christophe Bahadoran

Université Blaise Pascal

- Particules sur $\{1, \ldots, N\}$ avec exclusion
- Intérieur saut à droite (q) et à gauche (p)
- Bords Réservoirs de densités $\rho_l, \rho_r \in [0, 1]$
- Mesure empirique

$$\pi^N := N^{-1} \sum_{y=1}^{N} \underbrace{\eta(y)}_{\text{nb part. en y}} \ \delta_{y/N}$$

- Etat stationnaire μ^N
- π^N, $N \to \infty$? (LGN, TCL, PGD)

Equilibre $\rho_l = \rho_r = \rho_0$

- $\mu^N = \mathcal{B}(\rho)^{\otimes\{1,\ldots,N\}}$
- PGD $\quad \mu^N(\pi^N \simeq \pi) \sim e^{-NI(\pi)}$

$$I[\rho(.)dx] = \int_0^1 \underbrace{h(\rho(x)|\rho_0)}_{\text{entropie de Bernoulli}} \, dx$$

- Typique ($I = 0$) $\rho(.) \equiv \rho_0$

Hors-équilibre $\rho_l \neq \rho_r$

- Corrélations longues (Spohn 84)
- I non-locale: Derrida et al. (2002,2003), analytique
- Bertini et al. (2002), dynamique, $p = q$
- approche dynamique pour $p \neq q$?

Cas symétrique $\rho_l \neq \rho_r$ Derrida et al. (2002)

- PGD stationnaire

$$I[\rho(.)] = \sup_{F \text{ monotone } \rho_l \to \rho_r} \left[\int_0^1 h(\rho(x)|F(x)) + \log \frac{F'(x)}{\rho_r - \rho_l} \right] dx$$

- $\rho(.) \mapsto F_{\rho(.)}$ non locale
- $\rho = F + F(1-F)F''/(F')^2$
- Profil typique $(S = 0)$

$$\rho^*(x) = \rho_l(1-x) + \rho_r x$$

- Sol. stat. de $\partial_t \rho = \Delta \rho$ + cond. bords

Cas asymétrique $\rho_l \neq \rho_r$ Derrida et al. (2003)

- Régime choc $\rho_l < \rho_r$

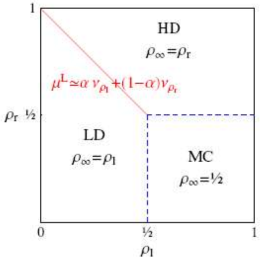
$$S[\rho(.)] = \inf_{y\in[0,1]} \int_0^y [h(\rho(x)|\rho_l) + K(\rho_l)]dx + \int_y^1 [h(\rho(x)|\rho_r) + K(\rho_r)]dx$$

- Régime raréfaction $\rho_l > \rho_r$

$$S[\rho(.)] = \sup_{F:\downarrow[0,1]\to[\rho_l,\rho_r]} \int_0^1 [h(\rho(x)|F(x)) + K(F(x))]dx$$

- $h(\rho|\rho_0)$ Bernoulli, $K(\rho) = \log[\rho(1-\rho)]$

Profil typique ($S = 0$)



- MC: Maximum current phase, bulk dominated with $\rho_\infty = \frac{1}{2}$ independent of the boundary conditions, maximal current $j = (p-q)/4$
- LD, HD: Low and high density phase, boundary dominated with $\rho_\infty = \rho_l$ and $\rho_\infty = \rho_r$ respectively
- ——: phase coexistence line first order phase transition between HD and LD with $\rho_r > \rho_l$
- – –: continuous phase transition between HD, LD and MC

- Exemple 1 (Freidlin-Wentzel), $V(x^*) = 0 < V(x \neq x^*)$

$$\begin{array}{rcl} dx_t^\varepsilon & = & -V'(x_t^\varepsilon)dt + \varepsilon^{1/2}dW_t \\ & \downarrow & \\ \dot{x}_t & = & -V'(x_t) \end{array}$$

- $\mu^\varepsilon = e^{-2\varepsilon^{-1}V(x)}dx \Rightarrow I(x) = 2V(x)$
- PGD dyn. $\mathcal{I}_{0,T}(x_.) = \frac{1}{2}\int_0^T (\dot{x}_t + V'(x_t))^2 dt$
- Quasi-potentiel

$$S(x) := \inf\left\{\mathcal{I}_{-\infty,0}(x_.) :\ x_{-\infty} = x^*,\ x_0 = x\right\}$$

- $S(x) = 2V(x)$, $\check{x}_.$ solution $x \longrightarrow x^*$ (Onsager-Machlup)

Exemple 2

$$\partial_t \rho = \nabla.[D(\rho)\nabla\rho] - \varepsilon^{-1/2}\nabla.[a(\rho)^{1/2}B_d(t,x)]$$

PGD dyn. (Kipnis et al. 89)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\rho(.,.)) &= \frac{1}{2}\int \left\langle \partial_t\rho - \nabla.[D(\rho)\nabla\rho], \Sigma^{-1}(\partial_t\rho - \nabla.[D(\rho)\nabla\rho])\right\rangle dt \\ \Sigma(\rho) &= -\nabla.[a(\rho)\nabla] \end{aligned}$$

Bertini et al. 08 avec $\rho^*(.) \equiv \rho_0$

$$\begin{aligned} S[\rho(.)] &= \int_{\mathbb{T}} h(\rho(x)|\rho_0)dx \\ D(\rho) &= a(\rho)h''(\rho) \end{aligned}$$

Exemple 3 (Bertini et al. 02)

- $D(\rho) = 1$, $a(\rho) = \rho(1-\rho)$, $h(\rho)$ Bernoulli
- $\mathcal{I}[\rho(.,.)] = +\infty$ si $\neq$ bords (Bertini et al. 2009)
- Quasi-potentiel

$$S[\rho(.)] = \sup_{F \text{ monotone } \rho_l \to \rho_r} \left[\int_0^1 h(\rho(x)|F(x)) + \log \frac{F'(x)}{\rho_r - \rho_l} \right] dx$$

- Trajectoire optimale

$$\begin{aligned} \partial_t \check{\rho} &= \Delta \check{\rho} - \nabla . \left[\check{\rho}(1-\check{\rho}) \frac{\nabla \check{F}}{F(1-F)} \right] + \text{ cond. bords} \\ \partial_t \check{F} &= \Delta \check{F} + \text{ cond. bords} \end{aligned}$$

- Comportement typique

$$\begin{aligned} \partial_t\rho(t,x)+\partial_x f[\rho(t,x)] &= 0 \\ \rho(t,0^+) &\in^l \rho_l \\ \rho(t,1^-) &\in^r \rho_r \end{aligned}$$

- Bords au sens de Bardos et al. (79)
- Flux $f(0)=f(1)=0$, f strict. conc. Ex: $f(\rho)=\rho(1-\rho)$
- Entropie $h(\rho)$ strict. cvx $\mapsto g(\rho)$ flux d'entropie
- Production d'entropie

$$\rho(.,.)\mapsto \mu(dt,dx)=\partial_t h(\rho(t,x))+\partial_x g(\rho(t,x))$$

- Solution entropique sol faible tq $\mu\leq 0$

- $\mathcal{I}[\rho(.,.)] = \mathcal{I}^\circ[\rho(.,.)] + \mathcal{I}^l[\rho(.,.)] + \mathcal{I}^r[\rho(.,.)]$
- Intérieur Jensen & Varadhan (2000, 2004), Bertini et al. (2010), Mariani (2010)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\circ[\rho(.,.)] &= \sup\{\mu(\varphi), \varphi : (0,T)\times(0,1)\to(0,1)\} \\ &= \mu^+((0,T)\times(0,1)) \end{aligned}$$

si $\rho(.,.)$ solution faible ($+\infty$ sinon)

- Bords (Bodineau et Derrida 05)

$$\mathcal{I}^l[\rho(.,.)] = \int_0^T i^l(\rho(t,0^+)|\rho_l)dt$$

- $i^l(\rho|\rho_l) = 0$ ssi $\rho \in^l \rho_l$

Régime choc $\rho_l < \rho_r$

Entropie relative

$$h(\rho|\rho_0) \quad := \quad h(\rho) - h(\rho_0) - h'(\rho_0)(\rho - \rho_0)$$

Compensateur

$$K(\rho) := [\varphi(\rho) - \rho]h'(\rho) + h(\rho) + h(\varphi(\rho)) = L(f(\rho))$$

Theorem (B.)

$$\begin{aligned} S[\rho(.)] = \quad & \inf_{y\in[0,1]} \quad \int_0^y [h(\rho(x)|\rho_l) + K(\rho_l)]dx \\ & + \qquad \int_y^1 [h(\rho(x)|\rho_r) + K(\rho_r)]dx \end{aligned}$$

Régime raréfaction: $\rho_l > \rho_r$

Entropie relative

$$h(\rho\,|\rho_0) \quad := \quad h(\rho) - h(\rho_0) - h'(\rho_0)(\rho - \rho_0)$$

Compensateur

$$K(\rho) := [\varphi(\rho) - \rho]h'(\rho) + h(\rho) + h(\varphi(\rho)) = L(f(\rho))$$

Théorème (B.)

$$S[\rho(.)] \quad = \quad \sup_{F\in\mathcal{F}} \int_0^1 [h(\rho(x)|F(x)) + K(F(x))]dx$$

$$\mathcal{F} \quad = \quad \{F : [0,1] \to [\rho_r, \rho_l], \downarrow\}$$

Régime choc: $\rho_l < \rho_r$

- $\mathcal{R}$ ensemble des trajectoires optimales.
- $\mathcal{Y}$ ensemble des y optimaux

Théorème (B.)

Il y a une bijection $y \mapsto \rho^y(.,.)$ from $\mathcal{Y}$ to $\mathcal{R}$

Description de ρ^y $\check{\rho}(t,x) = \rho(-t, 1-x)$, $t > 0$

- Au temps 0 antichoc $\varphi(\rho_l) > \varphi(\rho_r)$ crée en $\check{y} = 1 - y$, $\rightarrow$ vitesse v jusqu'au bord
- Avant le bord, $\check{\rho}$ entropique hors $\check{y}$, $\in^l$ ρ_r en 0, $\in^r$ ρ_l en 1
- $(v < 0)$ $\check{y} \rightarrow 0$, puis $\check{\rho}$ entropique, $\in^l$ ρ_l en 0 et $\in^r$ ρ_l en 1

Régime raréfaction: $\rho_l > \rho_r$

Théorème (B.)

Il existe un unique minimiseur

Description du minimiseur $\check{\rho}(t, x) = \rho(-t, 1 - x)$, $t > 0$

- $\rho(.) \mapsto F_{\rho(.)}$ non locale
- F obtenu par la construction de Young
- $\varphi(\check{F})$ sol. ent. avec $\in^l \varphi(\rho_r)$ en 0, $\in^r \varphi(\rho_l)$ en 1
- $\check{\rho}(t, x)$: sol. ent. avec $\in^l \check{F}(t, 0^+)$ et $\in^r \check{F}(t, 1^-)$