

# Estimation et minimisation du coût énergétique d'une succession de fragmentations.

Joaquín Fontbona, Marc Hoffmann, Nathalie Krell et Servet  
Martínez

DIM de l'Universidad de Chile, LAMA à l'ENSAE, IRMAR de l'Université de  
Rennes 1.

Journées Mas  
3 septembre 2010

# Plan

- 1 **Préliminaires.**
  - Définition d'une fragmentation.
  - Problématique.
- 2 **Estimation statistique.**
  - Mesure empirique.
  - Stratégie.
  - Estimation paramétrique.
  - Estimation non paramétrique.
- 3 **Minimisation du coût énergétique**
  - Coût énergétique.
- 4 **La bibliographie.**

# Plan

- 1 **Préliminaires.**
  - Définition d'une fragmentation.
  - Problématique.
- 2 Estimation statistique.
  - Mesure empirique.
  - Stratégie.
  - Estimation paramétrique.
  - Estimation non paramétrique.
- 3 Minimisation du coût énergétique
  - Coût énergétique.
- 4 La bibliographie.

# Définition heuristique d'une fragmentation.

On va considérer les fragmentations à valeurs dans l'espace

$$\mathcal{S}^\downarrow := \left\{ \mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots), s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} s_i \leq 1 \right\}.$$

Une fragmentation  $X$  est un processus de Markov à valeur dans  $\mathcal{S}^\downarrow$  vérifiant les deux propriétés.

- 1 **La propriété de branchement:** différents fragments ont des évolutions indépendantes
- 2 **La propriété d'auto-similarité:** la dislocation va se produire de manière auto-similaire.

# Définition d'une fragmentation.

La fragmentation va être totalement caractérisée par  $\alpha \in \mathbb{R}$  et une mesure de dislocation  $\nu$  positive sur  $\mathcal{S}^\downarrow$ .

La manière dont un fragment se disloque va être déterminée par la mesure de dislocation  $\nu$ .

La constante  $\alpha$  gouverne la vitesse à laquelle le fragment va se disloquer.

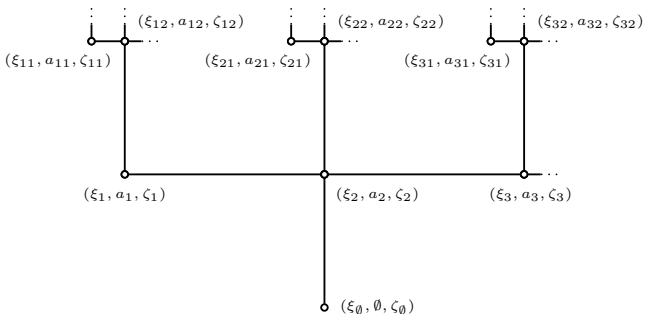
# Définition d'une fragmentation.

La fragmentation va être totalement caractérisée par  $\alpha \in \mathbb{R}$  et une mesure de dislocation  $\nu$  positive sur  $\mathcal{S}^\downarrow$ .

La manière dont un fragment se disloque va être déterminée par la mesure de dislocation  $\nu$ .

La constante  $\alpha$  gouverne la vitesse à laquelle le fragment va se disloquer.

**Cadre :**  $\nu$  est une probabilité et  $\alpha \geq 0$ .



## Definition

Soient deux familles indépendantes de variables i.i.d. indexées par  $\mathcal{U} := \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^n$ :  $(\bar{\xi}_u, u \in \mathcal{U})$  et  $(\mathbf{e}_u, u \in \mathcal{U})$ , où pour  $u \in \mathcal{U}$   $\bar{\xi}_u = (\tilde{\xi}_{ui})_{i \in \mathbb{N}}$  a pour loi  $\nu$ , et  $(\mathbf{e}_{ui})_{i \in \mathbb{N}}$  est une suite de variables exponentielles i.i.d. de paramètre 1. On définit par récurrence

$$\xi_\emptyset := 1, \quad a_\emptyset := 0, \quad \zeta_\emptyset := 1^{-\alpha} \mathbf{e}_\emptyset,$$

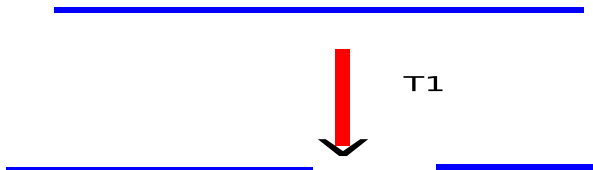
et pour  $u \in \mathcal{U}$  et  $i \in \mathbb{N}$ :

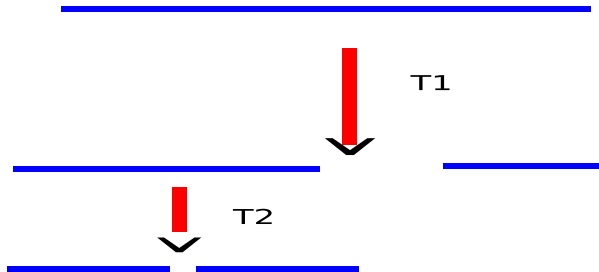
$$\xi_{ui} := \tilde{\xi}_{ui} \xi_u, \quad a_{ui} := a_u + \zeta_u, \quad \zeta_{ui} := \xi_{ui}^{-\alpha} \mathbf{e}_{ui}.$$

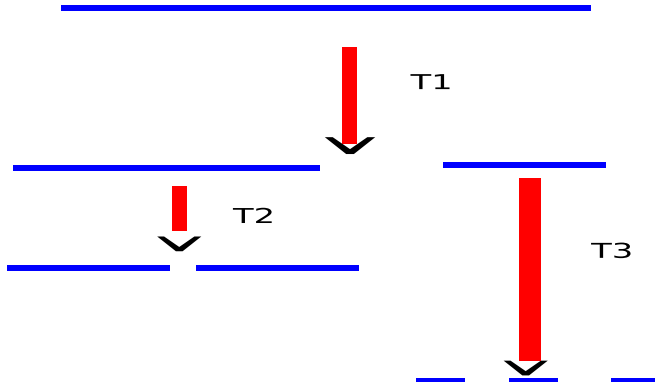


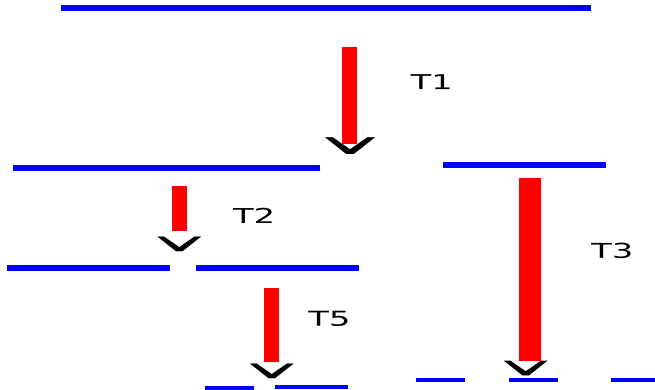
# Un exemple.

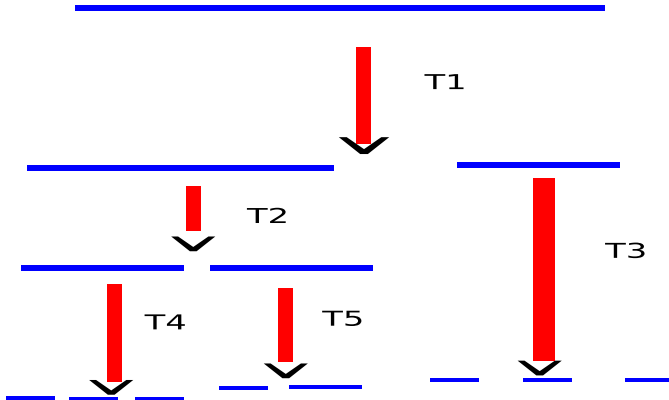
---

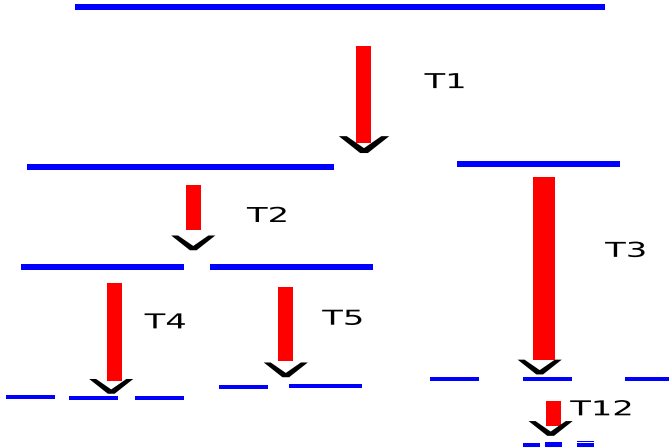


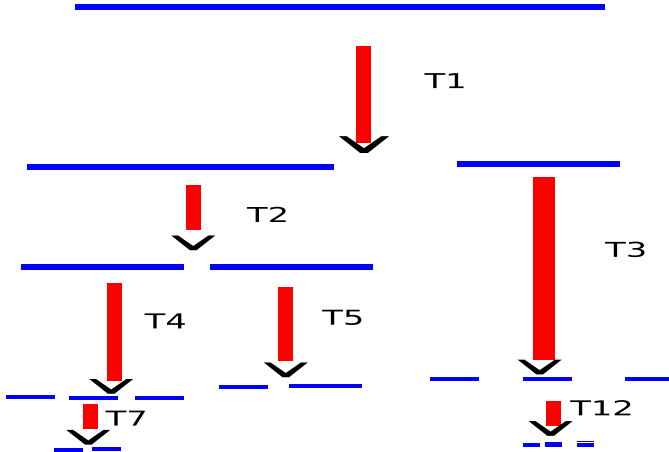




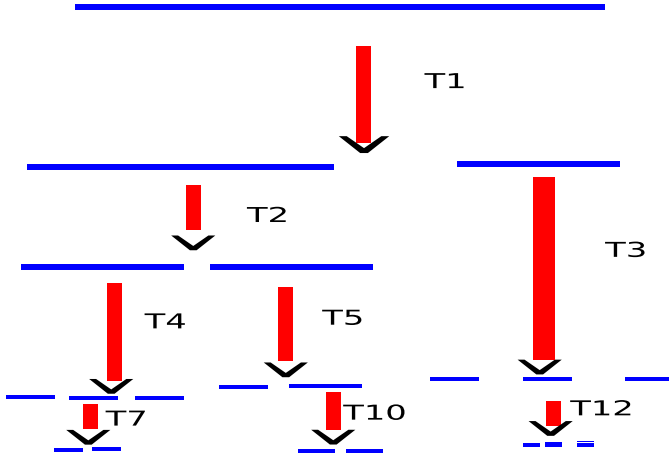


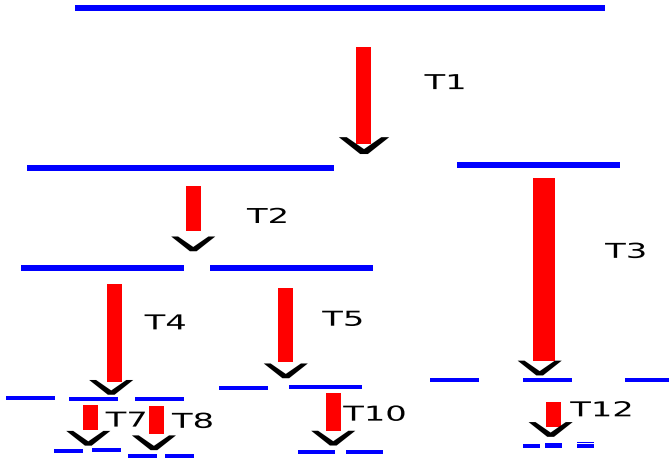


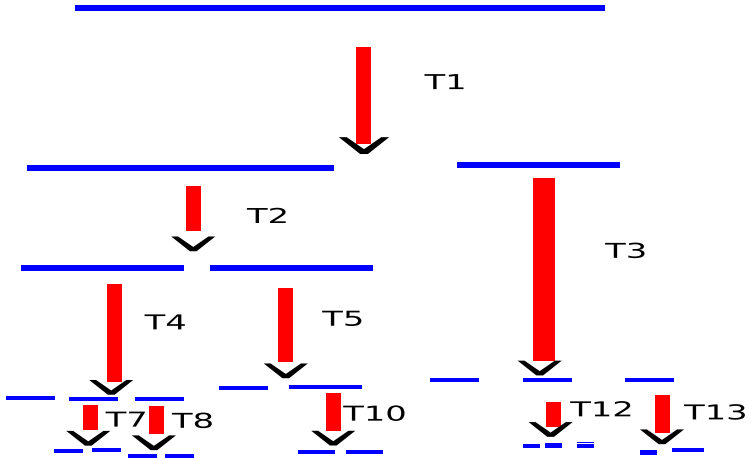


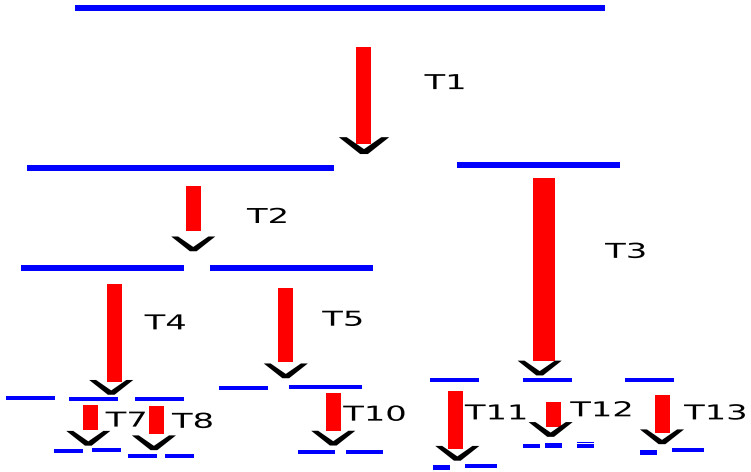


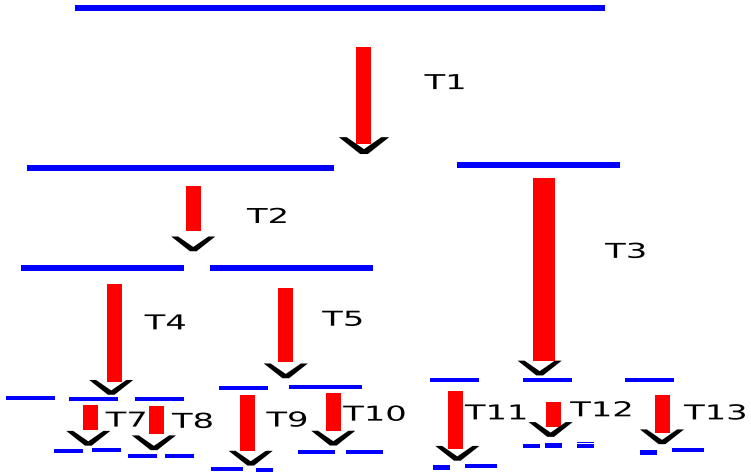


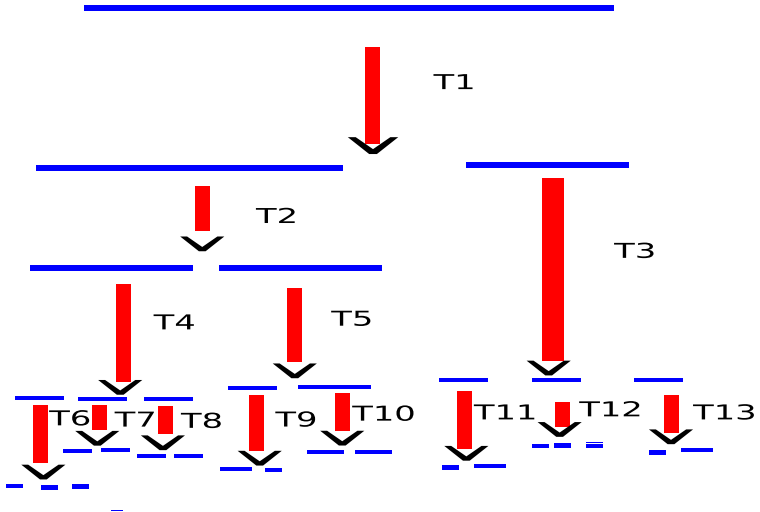






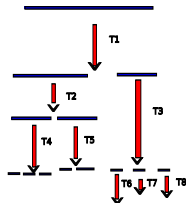
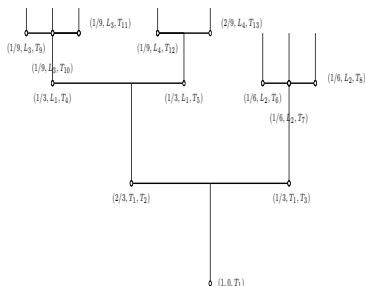






# Lien fragmentation et arbre généalogique.

On utilisera donc la suite le fait que l'on peut réécrire les  $\{X_i(t), i \in \mathbb{N}, t \geq 0\}$  sous la forme  $\{\xi_u, u \in \mathcal{U}\}$ .



# Un subordonateur important dans le cas $\alpha = 0$ .

Soit  $\chi(t)$  = la taille du fragment marqué. C'est à dire que  $\chi(t) = X_{n(t)}(t)$  est un fragment choisi de manière biaisée par la taille:  $\mathbb{P}(n(t) = l \mid X(t)) = X_l(t)$ .

Bertoin a montré que

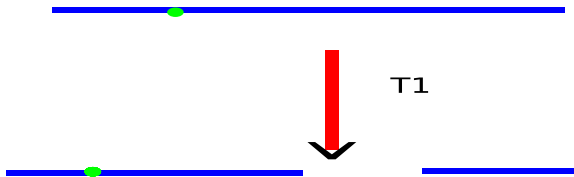
$$\xi_t := -\log \chi(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

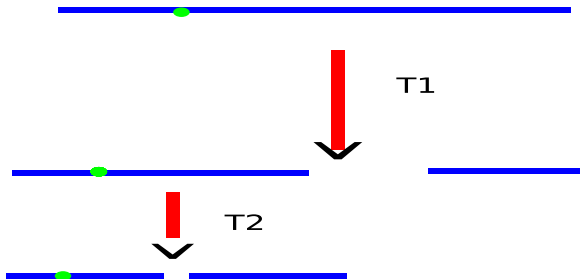
est un subordonateur.

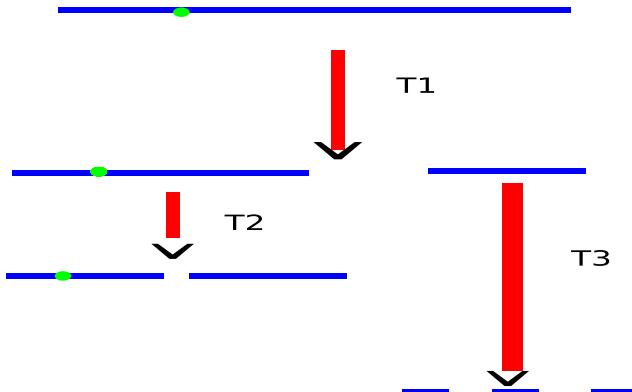


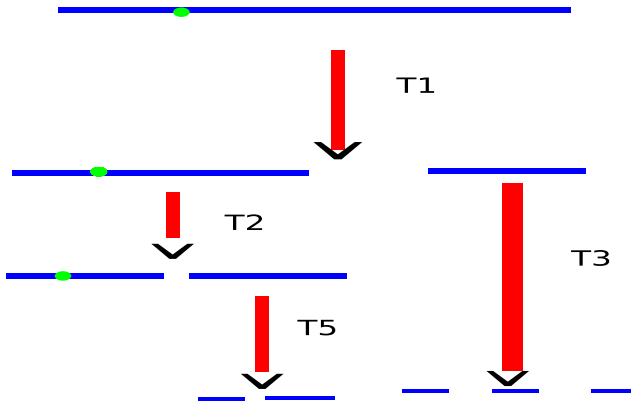
# Evolution du fragment marqué.

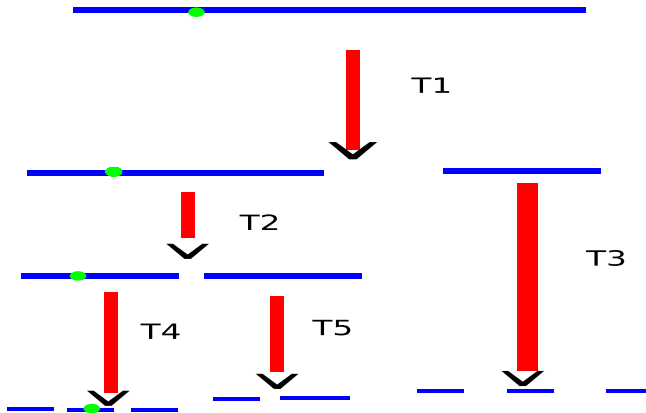


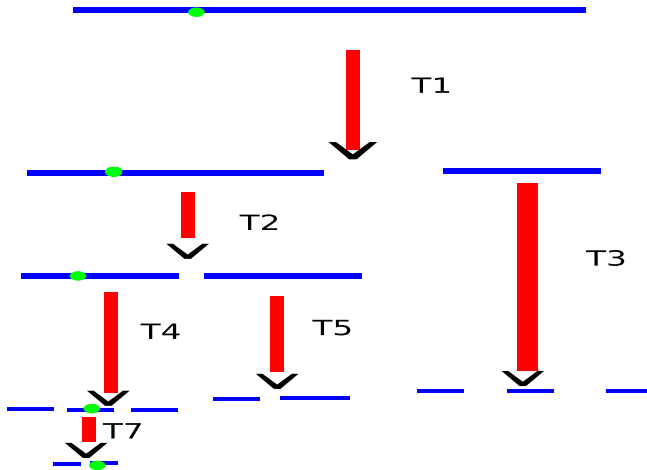


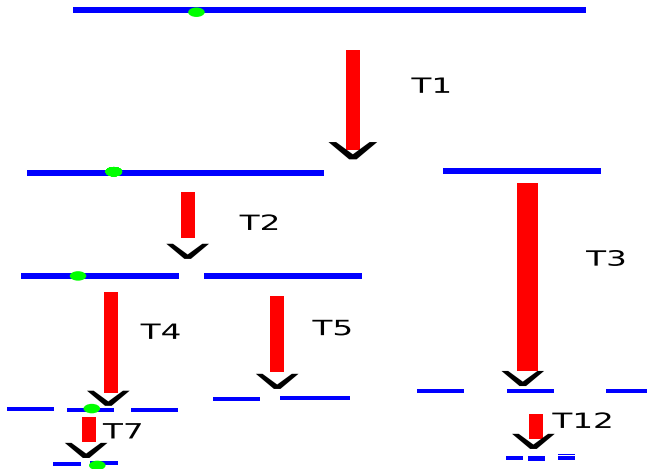




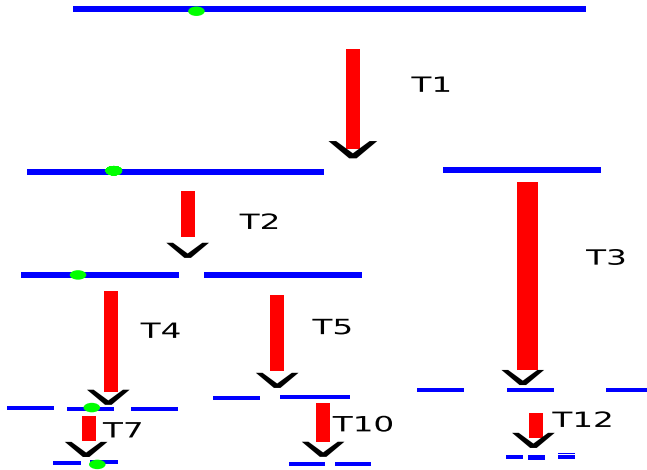


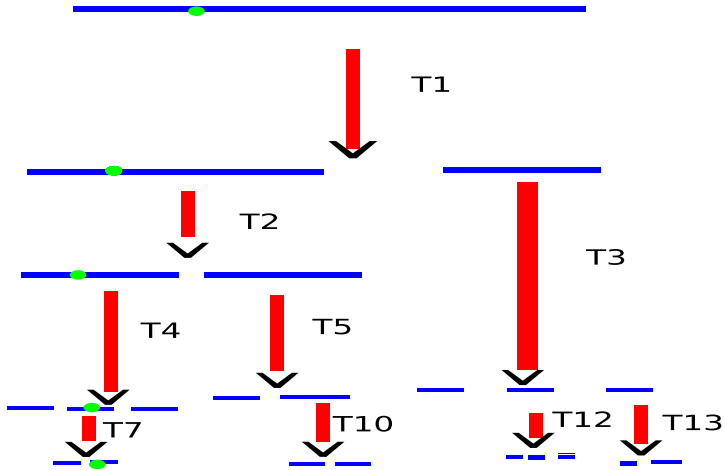


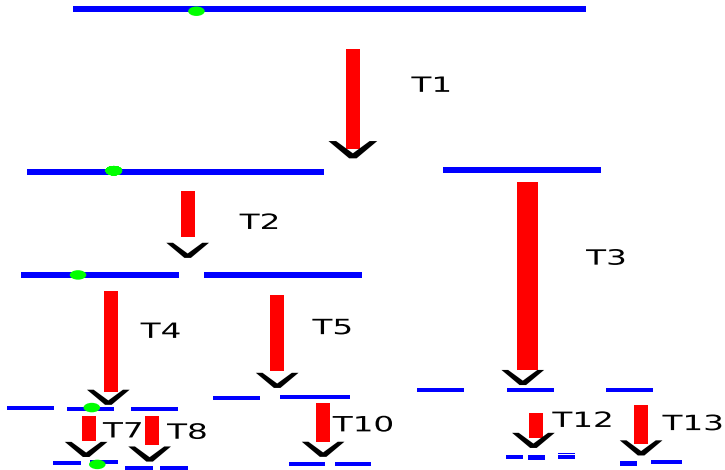


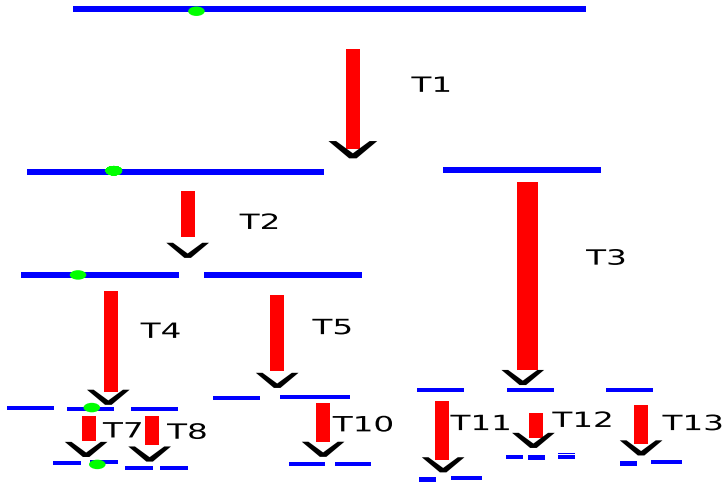


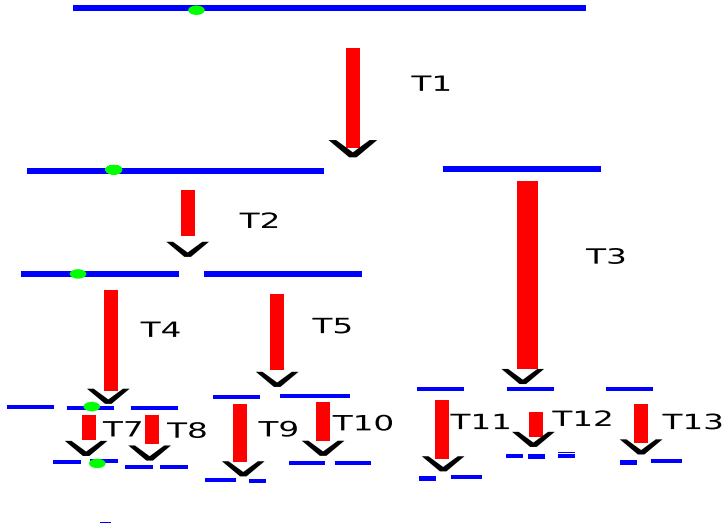


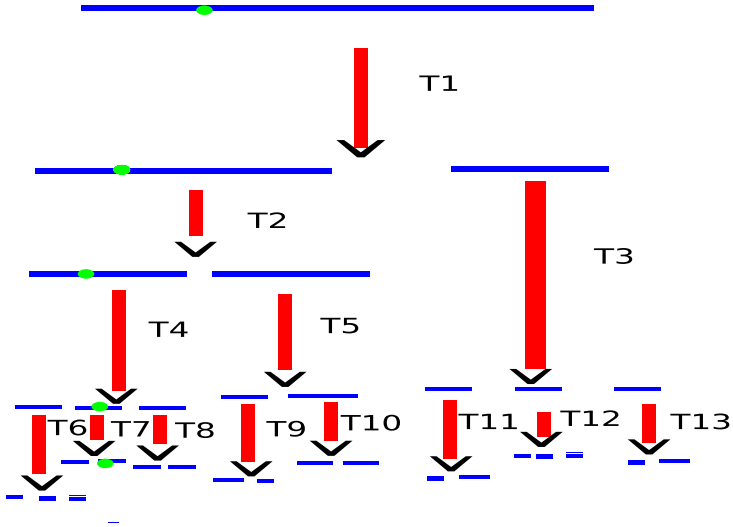












# L'observable.

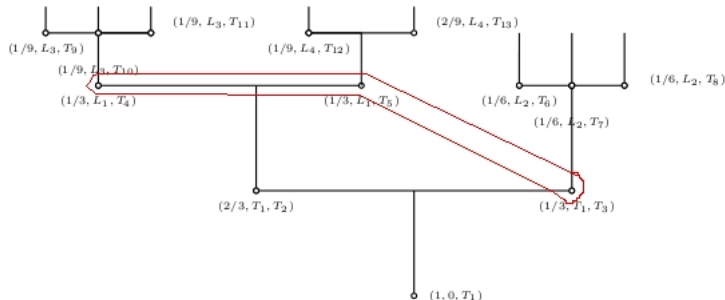
On observe la taille du fragment dès que qu'elle a atteint une taille inférieure à  $\varepsilon > 0$ :  $X_\varepsilon := (\xi_u, u \in \mathcal{U}_\varepsilon)$  avec

$$\mathcal{U}_\varepsilon := \{u \in \mathcal{U}, \xi_{u-} \geq \varepsilon, \xi_u < \varepsilon\},$$

et  $u-$  le parent du fragment d'étiquette  $u$ .

On va considérer l'asymptotique lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Ligne d'arrêt: le fragment gelé dès qu'il a une taille plus petite que 0.34.





# Un exemple.



Préliminaires.

Estimation statistique.  
Minimisation du coût énergétique.  
La bibliographie.

Définition d'une fragmentation.  
Problématique.







# Plan

- 1 Préliminaires.
  - Définition d'une fragmentation.
  - Problématique.
- 2 Estimation statistique.
  - Mesure empirique.
  - Stratégie.
  - Estimation paramétrique.
  - Estimation non paramétrique.
- 3 Minimisation du coût énergétique
  - Coût énergétique.
- 4 La bibliographie.

# Mesure empirique.

Ainsi on va considérer d'abord la mesure empirique

$$\mathcal{E}_\varepsilon(g) := \sum_{u \in \mathcal{U}_\varepsilon} \xi_u g(\xi_u/\varepsilon),$$

avec  $g(\cdot)$  une fonction test.

Bertoin et Martinez ont montré dans [2] que, sous des hypothèses assez faibles sur  $\nu(\cdot)$ , la mesure  $\mathcal{E}_\varepsilon(g)$  converge vers

$$\mathcal{E}(g) := \frac{1}{c(\nu)} \int_0^1 \frac{g(a)}{a} \int_{\mathcal{S}^\downarrow} \sum_{i=1}^{\infty} s_i \mathbf{1}_{\{s_i < a\}} \nu(ds) da$$

en probabilité quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , avec  $c(\nu) = - \int_{\mathcal{S}^\downarrow} \sum_{i=1}^{\infty} s_i \log s_i \nu(ds)$ .

# Un outil crucial.

On associe au subordonateur  $\xi(t) = -\log \chi(t)$  le temps d'arrêt

$$T_\varepsilon := \{t \geq 0, \chi(t) < \varepsilon\},$$

Le valeur du subordonateur considéré au premier temps où il devient plus petit que  $\log(1/\varepsilon)$  est importante comme le montre l'égalité suivante: D'où

$$\mathbb{E}[\mathcal{E}_\varepsilon(g)] = \mathbb{E} \left[ \sum_{u \in \mathcal{U}} \mathbb{1}_{\{\xi_{u-} \geq \varepsilon, \xi_u < \varepsilon\}} \xi_u g(\xi_u/\varepsilon) \right] = \mathbb{E}^* [g(\chi(T_\varepsilon)/\varepsilon)]$$

# But.

Notre but va être d'estimer

$$\pi(dx) := e^{-x} \sum_{i=1}^{\infty} \nu(-\log s_i \in dx).$$

la mesure de Lévy du subordonateur  $\xi(t)$ .



# But.

Notre but va être d'estimer

$$\pi(dx) := e^{-x} \sum_{i=1}^{\infty} \nu(-\log s_i \in dx).$$

la mesure de Lévy du subordonateur  $\xi(t)$ .

$\alpha$  est un paramètre nuisible.

# But.

Notre but va être d'estimer

$$\pi(dx) := e^{-x} \sum_{i=1}^{\infty} \nu(-\log s_i \in dx).$$

la mesure de Lévy du subordonateur  $\xi(t)$ .

$\alpha$  est un paramètre nuisible.

La mesure  $\pi$  intervient explicitement dans l'énergie  $\mathcal{E}(g)$  comme le montrent les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(g) &= \frac{1}{c(\pi)} \int_0^1 \frac{g(a)}{a} \pi(-\log a, +\infty) da \\ &= \frac{1}{c(\pi)} \int_0^{+\infty} g(e^{-x}) \pi(x, +\infty) dx. \end{aligned}$$

# Stratégie.

- Etablir la vitesse de convergence de  $\mathcal{E}_\varepsilon(g)$ .

# Stratégie.

- Etablir la vitesse de convergence de  $\mathcal{E}_\varepsilon(g)$ .
- Choisir les bonnes fonctions tests  $g$  afin de savoir ce qui est contenu dans la limite  $\mathcal{E}(g)$ .

# Stratégie.

- Etablir la vitesse de convergence de  $\mathcal{E}_\varepsilon(g)$ .
- Choisir les bonnes fonctions tests  $g$  afin de savoir ce qui est contenu dans la limite  $\mathcal{E}(g)$ .
- En déduire des estimateurs paramétriques et non-paramétriques.

# Stratégie.

- Etablir la vitesse de convergence de  $\mathcal{E}_\varepsilon(g)$ .
- Choisir les bonnes fonctions tests  $g$  afin de savoir ce qui est contenu dans la limite  $\mathcal{E}(g)$ .
- En déduire des estimateurs paramétriques et non-paramétriques.
- Généraliser à des observables plus réalistes.

# Estimation statistique.

- On reparamétrise  $\pi(\cdot)$  par la transformation logarithmique  $[0, +\infty) \leftrightarrow (0, 1]$ :

$$x \rightsquigarrow \pi(x) \leftrightarrow a \rightsquigarrow \beta(a) := a^{-1} \pi(-\log a), \quad a \in (0, 1).$$

- **Estimation semi-paramétrique**

$$m_k(\pi) := \int_0^{+\infty} x^k \pi(x) dx = \int_0^1 \log(1/a)^k \beta(a) da$$

- **Estimation non-paramétrique**

$$(\beta(a), a \in (0, 1)).$$

## Estimation paramétrique.

- $f(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction régulière telle que  $f(1) = 0$ , soit  $g(a) := -af'(a)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(g) &= \frac{1}{c(\pi)} \int_0^1 \frac{g(a)}{a} \pi(-\log a, +\infty) da \\ &= -\frac{1}{m_1(\pi)} \int_0^1 f'(a) \int_0^a \beta(u) du da \\ &= \frac{1}{m_1(\pi)} \int_0^1 f(a) \beta(a) da. \end{aligned}$$

- On va choisir  $f_\varepsilon$  qui va approximer 1 et soit  $g_\varepsilon(a) := -af'_\varepsilon(a)$ .  
On définit:

$$\widehat{m}_{1,\varepsilon} := \frac{1}{\mathcal{E}_\varepsilon(g_\varepsilon)}.$$



On suppose que  $\pi(dx) = \pi(x)dx$  est absolument continue, que  $x^{1-\lambda}\pi(x)$  reste borné en l'origine et  $\int_{[0,+\infty)} e^{\kappa x} \pi(dx) < +\infty$ .

## Théorème

- Pour  $1 \leq \mu < \kappa$ , la famille

$$\left(\sqrt{\varepsilon^{\frac{\mu}{\mu+1}} \frac{2\lambda}{(2\lambda+1)}}\right)^{-1} (\hat{m}_{1,\varepsilon} - m_1(\pi))$$

est  $\mathbb{P}_1$  tendue.

# Estimation non paramétrique.

- Si  $g(a) := -af'(a)$  avec  $f(1) = 0$ , alors

$$\mathcal{E}(g) = \frac{1}{m_1(\pi)} \int_0^1 f(a)\beta(a)da.$$

- On va choisir une fonction noyau  $\varphi_{\gamma_\varepsilon, a}(\cdot) = \gamma_\varepsilon \varphi((\cdot - a)/\gamma_\varepsilon)$  ayant suffisamment de régularité et s'annulant de manière propice.
- On définit

$$\hat{\beta}_\varepsilon(a) := \hat{m}_{1,\varepsilon} \mathcal{E}_{\varepsilon,\sigma}(-\cdot \varphi'_{\gamma_\varepsilon, a}(\cdot)) \quad a \in (0, 1).$$

On suppose que  $\pi$  vérifie les mêmes hypothèses que pour le théorème précédent, et que  $\beta(\cdot)$  est höldérienne d'indice de régularité  $s$ .

### Théorème

- Pour  $1 \leq \mu < \kappa$ , la famille

$$\left(\sqrt{\varepsilon}^{\frac{\mu}{\mu+1}} \frac{2s}{(2s+3)}\right)^{-1} \left(\widehat{\beta}_\varepsilon(\mathbf{a}) - \beta(\mathbf{a})\right)$$

est tendue sous  $\mathbb{P}_1$ , pour  $s < 3\kappa$ .

# Plan

- 1 Préliminaires.
  - Définition d'une fragmentation.
  - Problématique.
- 2 Estimation statistique.
  - Mesure empirique.
  - Stratégie.
  - Estimation paramétrique.
  - Estimation non paramétrique.
- 3 Minimisation du coût énergétique
  - Coût énergétique.
- 4 La bibliographie.

## Coût énergétique.

$$\kappa(q) := \int_{\mathcal{S}^\downarrow} \left( 1 - \sum_{j=1}^{\infty} s_j^q \right) \nu(ds). \quad (2)$$

Hypothèse de Malthus:  $\exists! \gamma$  tel que  $\kappa(\gamma) = 0$ .

On s'intéresse à l'énergie totale  $E^{(\mathbf{x})}(\eta)$  utilisé par la première machine pour une taille de tamis  $\eta$ .

$$E^{(\mathbf{x})}(\eta) = \sum_{t \geq 0} \mathbb{1}_{X_{k(t)}(t_-, \mathbf{x}) \geq \eta} X_{k(t)}^\beta(t_-, \mathbf{x}) \varphi(\Delta(t)),$$

où  $\beta > 0$ . Simplifier en  $E(\eta) := E^{(1,0,\dots)}(\eta)$ .

$\mathbf{x}^\eta = (x_1^\eta, x_2^\eta, \dots)$  est le réarrangement en ordre décroissant de la taille des fragments gelés dès qu'ils ont une taille  $< \eta$ .  
Soit  $\mathcal{E}(\eta, \eta_0)$  le coût énergétique pour les 2 machines de taille de tamis respectifs  $\eta$  et  $\eta_0$

$$\mathcal{E}(\eta, \eta_0) \stackrel{(\text{loi})}{=} E(\eta) + \widehat{E}^{(\mathbf{x}_\eta)}(\eta_0), \quad (3)$$

où  $\widehat{E}^{(\mathbf{x})}(\cdot)$  est l'énergie d'une copie de la seconde fragmentation  $\widehat{\mathbf{X}}$  partante de  $\mathbf{x}$ , et indépendante de la première fragmentation.

## Théorème

*Sous de bonnes hypothèses. Pour  $\eta_0 = \eta e^{-\lambda}$  dès que  $\eta$  est assez petit:*

$$\hat{\gamma} > \gamma, \hat{\beta} < \beta \text{ (alors } \gamma - \beta < \hat{\gamma} - \hat{\beta} \text{)} : F_1 \gg F_{1,2} \gg F_2 .$$

$$\hat{\gamma} < \gamma, \hat{\beta} > \beta \text{ (alors } \gamma - \beta > \hat{\gamma} - \hat{\beta} \text{)} : F_2 \gg F_{1,2} \gg F_1 .$$

$$\hat{\gamma} < \gamma, \hat{\beta} < \beta \text{ et } \gamma - \beta < \hat{\gamma} - \hat{\beta} : F_1 \gg F_2 \gg F_{1,2} .$$

$$\hat{\gamma} < \gamma, \hat{\beta} < \beta \text{ et } \gamma - \beta > \hat{\gamma} - \hat{\beta} : F_2 \gg F_1 \gg F_{1,2} .$$

$$\hat{\gamma} > \gamma, \hat{\beta} > \beta \text{ et } \gamma - \beta < \hat{\gamma} - \hat{\beta} : F_{1,2} \gg F_1 \gg F_2 .$$





$$\hat{\gamma} > \gamma, \hat{\beta} > \beta \text{ et } \alpha - \beta > \hat{\gamma} - \hat{\beta} : F_2 \gg F_{1,2} \gg F_1 .$$

# Plan

- 1 Préliminaires.
  - Définition d'une fragmentation.
  - Problématique.
- 2 Estimation statistique.
  - Mesure empirique.
  - Stratégie.
  - Estimation paramétrique.
  - Estimation non paramétrique.
- 3 Minimisation du coût énergétique
  - Coût énergétique.
- 4 La bibliographie.



# La bibliographie.

-  J. BERTOIN (2006). *Random fragmentation and coagulation processes*. Cambridge Univ. Pr.
-  J. BERTOIN et S. MARTINEZ (2005). Fragmentation energy. *Adv. Appl. Probab.* **37** 553-570.
-  J. FONTBONA, N. KRELL et S. MARTÍNEZ (2010). Energy efficiency of consecutive fragmentation processes. A paraître au *Journal of Applied Probability*.
-  M. HOFFMANN et N. KRELL (2008). Self-similar branching Markov chains. A paraître à *Bernoulli*.