Bornes quantitatives pour la convergence en temps long de quelques processus de Markov

Florent Malrieu
Université de Rennes 1 – IRMAR

2 septembre 2010

Introduction

Processus de Markov avec une unique mesure invariante μ.

$$\mathcal{L}(X_t) = \mu_t \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}} \mu$$

- Comment quantifier cette convergence ?
  - inégalités fonctionnelles
  - couplage implicite ou explicite
- Propriétés de μ_t et de μ (densité, régularité,. . .)

Quelques « distances » classiques

- Entropie relative

$$\mathrm{Ent}(\tilde{\mu}|\mu) = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{d\tilde{\mu}}{d\mu} \log \frac{d\tilde{\mu}}{d\mu}\, d\mu & \text{si } \tilde{\mu} \ll \mu, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Distance en variation totale

$$\|\mu - \tilde{\mu}\|_{\mathrm{VT}} = \inf \left\{ \mathbb{P}(Z \neq \tilde{Z}) \; : \; Z \sim \mu, \; \tilde{Z} \sim \tilde{\mu} \right\}.$$

- Distance de Wasserstein d'ordre $p \geq 1$

$$W_p(\mu, \tilde{\mu}) = \inf \left\{ \left(\mathbb{E}|Z - \tilde{Z}|^p \right)^{1/p} \; : \; Z \sim \mu, \; \tilde{Z} \sim \tilde{\mu} \right\}.$$

Processus de Kolmogorov

- Processus de Kolmogorov sur $\mathbb{R}^d$

$$dX_t = \sqrt{2} dB_t - \nabla V(X_t)\, dt$$

avec $V : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ et $(B_t)_{t \geq 0}$ M. B. sur $\mathbb{R}^d$

- Mesure invariante

$$\mu(dx) = \frac{1}{Z} e^{-V(x)}\, dx \quad \text{avec} \quad Z = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-V(x)}\, dx.$$

- Équation de Fokker-Planck

$$\partial_t u = \Delta u + \mathrm{div}(u \nabla V)$$

Inégalités fonctionnelles

- Si $\mathrm{Hess}\, V \geq \lambda I$ avec $\lambda > 0$ (critère de Bakry-Émery)

$$\mathrm{Ent}(\mu_t|\mu) \leq \mathrm{Ent}(\mu_0|\mu)e^{-2\lambda t}.$$

- Variantes multiples de l'inégalité de Sobolev logarithmique

Bakry, Barthe, Cattiaux, Chafaï, Gentil, Guillin, Léonard, Roberto, Wang, Wu (après Gross...)

Deux généralisations cousines

- Processus de McKean-Vlasov

$$\begin{cases} dX_t = \sqrt{2}dB_t - \nabla V(X_t)\,dt - \nabla W * \mu_t(X_t)\,dt \\ \mathcal{L}(X_t) = \mu_t \end{cases}$$

Carrillo-McCann-Villani, Chatterjee-Pal-Pitman, Jourdain, Cattiaux, Guillin, Bolley

- Processus auto-attractif

$$\begin{cases} dX_t = \sqrt{2}dB_t - \nabla V(X_t)\,dt - \nabla W * \Pi_t(X_t)\,dt \\ \Pi_t = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \delta_{X_s}\,ds \end{cases}$$

Benaïm-Ledoux-Raymond, Kurtzmann-Klesptyn

Et si on enlève du bruit ?

- Processus hypoelliptiques

$$\begin{cases} dX_t = V_t\, dt \\ dV_t = dB_t - \lambda V_t\, dt - \nabla G(X_t)\, dt \end{cases}$$

Hairer-Mattingly, Villani, Bolley, Guillin, Bakry, Bonnefont, Baudoin, Chafaï

Et sans mouvement brownien ?

Quel rapport entre

- le déplacement d'une bactérie,
- le débit d'une connexion internet
- des réactions chimiques ?

Bactérie : modélisation

- Générateur infinitésimal

$$Lf(x,v) = v\partial_x f(x,v) + (a + (b-a)\mathbb{1}_{\{xv>0\}})(f(x,-v) - f(x,v)).$$

- Mesure invariante

$$\mu(dx,dv) = \frac{b-a}{2} e^{-(b-a)|x|} dx \otimes \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_{+1})(dv).$$

Alt, Othmer, Fontbona, Guérin, Herrmann, Vallois

Bactérie : convergence

Théorème

Pour tous $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$ et $v, \tilde{v} \in \{-1, +1\}$,

$$\left\| \mathcal{L}(X_t^{x,v}, V_t^{x,v}) - \mathcal{L}(X_t^{\tilde{x},\tilde{v}}, V_t^{\tilde{x},\tilde{v}}) \right\|_{\mathrm{TV}} \leq C(a,b) e^{r(a,b)|x \vee \tilde{x}|} e^{-\lambda_c t},$$

où

$$C(a,b) = \left(\frac{b}{a}\right)^{5/2} \frac{a+b}{\sqrt{ab}+b},$$

$$r(a,b) = \frac{3(b-a)}{4} \vee (b - \sqrt{ab}),$$

$$\lambda_c = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{2}.$$

TCP : modélisation

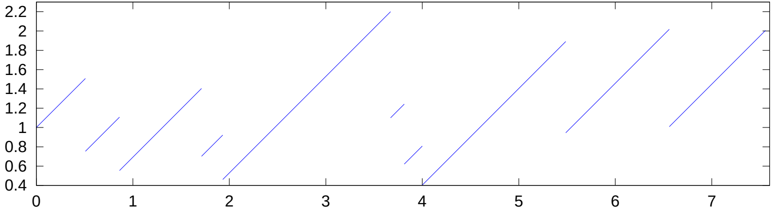
- Croissance linéaire entre les sauts
- Décroissance multiplicative à des instants aléatoires
- Taux de saut inhomogène $\lambda(x) = x$

Processus à valeurs dans $[0, +\infty)$ de générateur infinitesimal

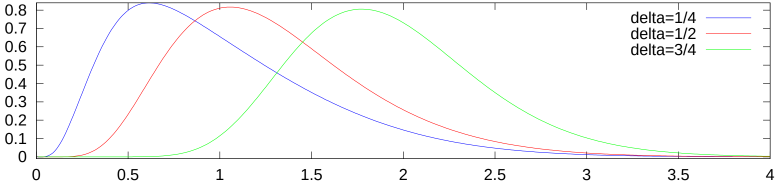
$$Lf(x) = f'(x) + x(f(\delta x) - f(x))$$

avec $\delta \in [0, 1)$.
Chafaï, Dumas, Graham, Guillemin, Ott, Paroux, Robert, Zwart

TCP : une trajectoire



TCP : mesure invariante



Un autre exemple important

- $X \in [0, 1]$: concentration d'un réactif
- $Y \in \{0, 1\}$: présence ou non du catalyseur

Générateur infinitésimal

$$Lf(x, y) = (y - x)\partial_x f(x, v) + \lambda(x, y)(f(x, 1 - y) - f(x, y))$$

Taux de saut λ : pour tous $x, \tilde{x} \in [0, 1]$ et $y \in \{0, 1\}$,

- $\lambda(x, y) \geq \underline{\lambda} > 0$,
- $|\lambda(x, y) - \lambda(\tilde{x}, y)| \leq \kappa |x - \tilde{x}|$

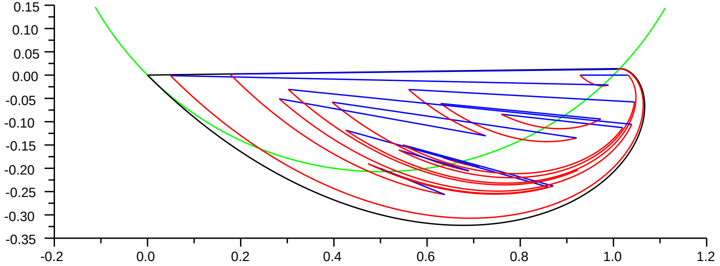
Théorème

Pour tout $t \geq 0$,

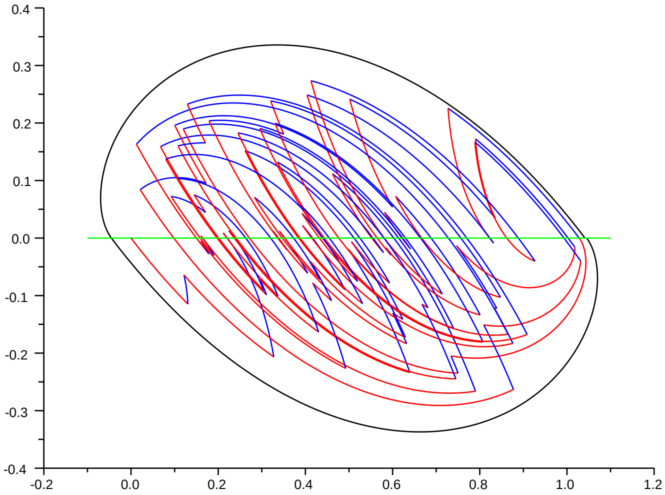
$$W_1\left(\mathcal{L}(X_t^{x,y}), \mathcal{L}(X_t^{\tilde{x},\tilde{y}})\right) \leq Ce^{-\alpha t}$$

Comment ça marche ?

Simple rotation



Double rotation 1



Double rotation 2