Marches aléatoires avec branchement et sélection : comportement de Brunet-Derrida

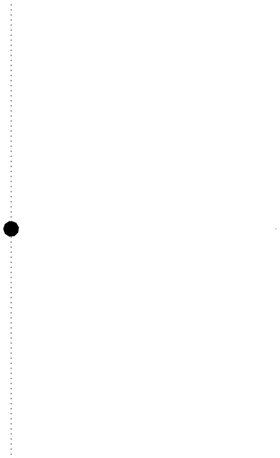
Jean-Baptiste Gouéré

Université d'Orléans

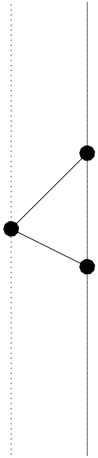
En collaboration avec Jean Bérard (Lyon 1)

Plan

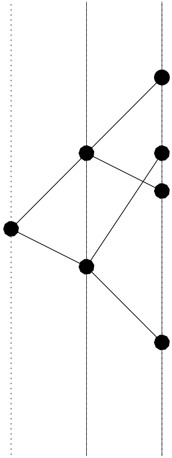
Marches aléatoires branchantes



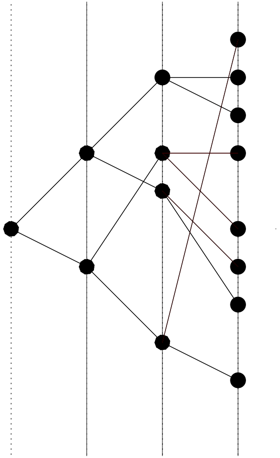
Marches aléatoires branchantes



Marches aléatoires branchantes



Marches aléatoires branchantes



Un paramètre :

- μ : loi des pas. On suppose les pas bornés.

M_t^∞ : position du maximum à l'instant t.

Vitesse

On pose :

$$\psi(t) = \ln\left(\int 2\exp(tx)\mu(dx)\right).$$

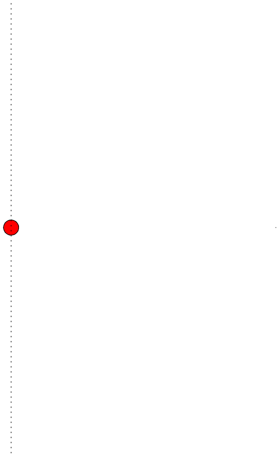
On a :

$$v^{\infty} = \inf\left\{\frac{\psi(t)}{t}, t > 0\right\}.$$

Théorème (Hammersley (1974), Kingman (1975), Biggins (1976))

$$\frac{M_t^{\infty}}{t} \to v^{\infty} \quad p.s.$$

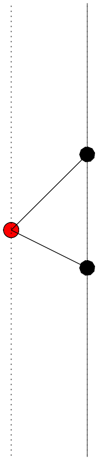
Marches aléatoires branchantes avec compétition



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- N : sélection des N particules les plus hautes.

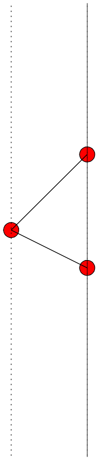
Marches aléatoires branchantes avec compétition



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- N : sélection des N particules les plus hautes.

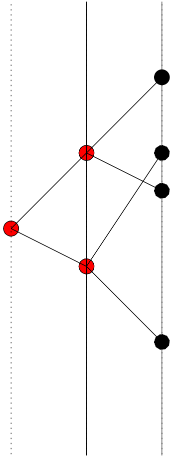
Marches aléatoires branchantes avec compétition



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- N : sélection des N particules les plus hautes.

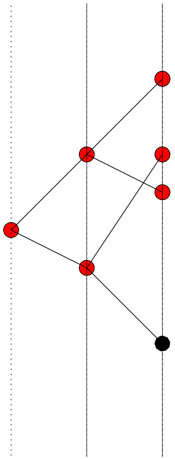
Marches aléatoires branchantes avec compétition



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- N : sélection des N particules les plus hautes.

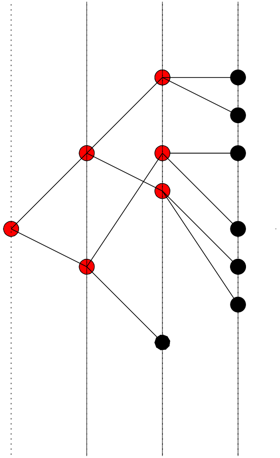
Marches aléatoires branchantes avec compétition



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- N : sélection des N particules les plus hautes.

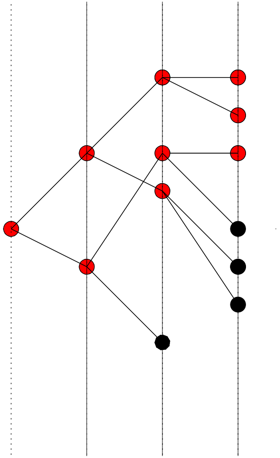
Marches aléatoires branchantes avec compétition



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- N : sélection des N particules les plus hautes.

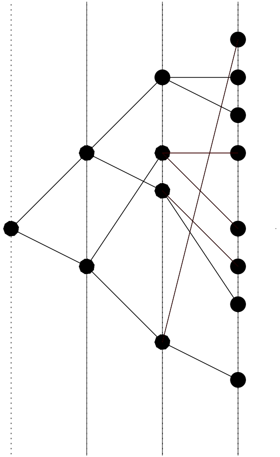
Marches aléatoires branchantes avec compétition



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- N : sélection des N particules les plus hautes.

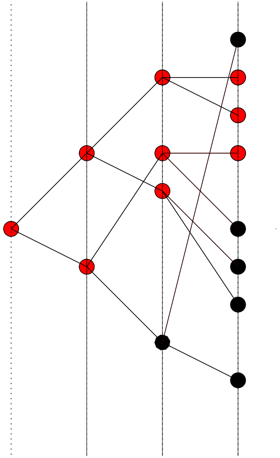
Marches aléatoires branchantes avec compétition



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- N : sélection des N particules les plus hautes.

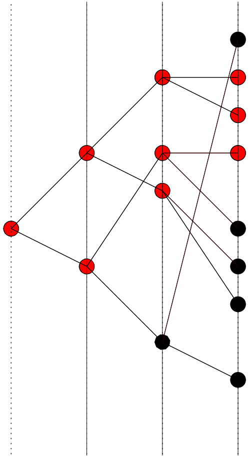
Marches aléatoires branchantes avec compétition



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- N : sélection des N particules les plus hautes.

Marches aléatoires branchantes avec compétition



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- N : sélection des N particules les plus hautes.

M_t^N : la position du maximum à l'instant t.
m_t^N : la position du minimum à l'instant t.

Résultats élémentaires

Proposition

$$M_t^N - m_t^N \leq C(\mu) \ln N.$$

Proposition

$$\frac{M_t^N}{t} \to v^N, \qquad L^1 \text{ et p.s.}$$

Proposition

$$v^N \to v^\infty.$$

Vitesse

Conjecture (Brunet et Derrida (1997))

On suppose l'existence de $t^* > 0$ *tel que :*

$$t^*\psi'(t^*) = \psi(t^*).$$

Vitesse

Conjecture (Brunet et Derrida (1997))

On suppose l'existence de $t^* > 0$ tel que :

$$t^*\psi'(t^*) = \psi(t^*).$$

Alors :

$$v^\infty - v^N \sim \frac{\chi(\mu)}{(\ln N)^2}.$$

Vitesse

Conjecture (Brunet et Derrida (1997))

On suppose l'existence de $t^* > 0$ tel que :

$$t^*\psi'(t^*) = \psi(t^*).$$

Alors :

$$v^\infty - v^N \sim \frac{\chi(\mu)}{(\ln N)^2}.$$

Méthode : étude de la vitesse de propagation dans une équation F-KPP perturbée.

Vitesse

Conjecture (Brunet et Derrida (1997))

On suppose l'existence de $t^* > 0$ tel que :

$$t^* \psi'(t^*) = \psi(t^*).$$

Alors :

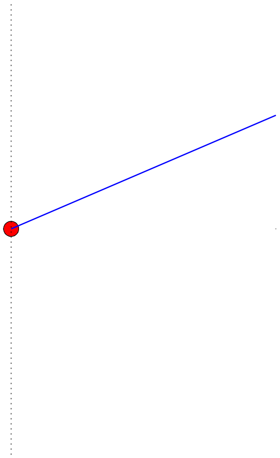
$$v^\infty - v^N \sim \frac{\chi(\mu)}{(\ln N)^2}.$$

Méthode : étude de la vitesse de propagation dans une équation F-KPP perturbée.

Théorème (Bérard et G. (2009))

La conjecture est vraie.

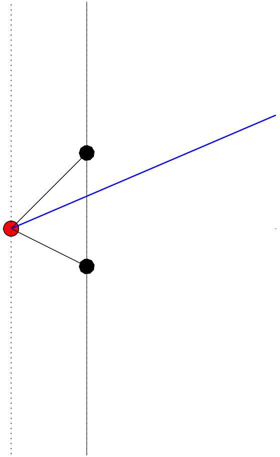
Marches aléatoires branchantes avec barrière



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- $\varepsilon > 0$

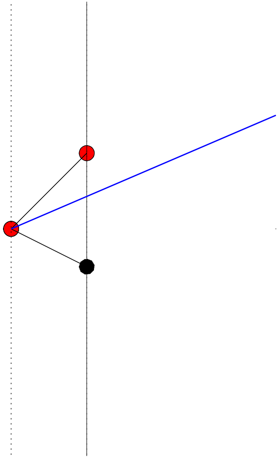
Marches aléatoires branchantes avec barrière



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- $\varepsilon > 0$

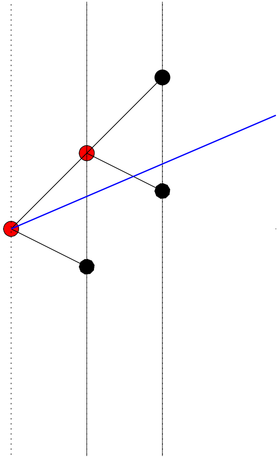
Marches aléatoires branchantes avec barrière



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- $\varepsilon > 0$

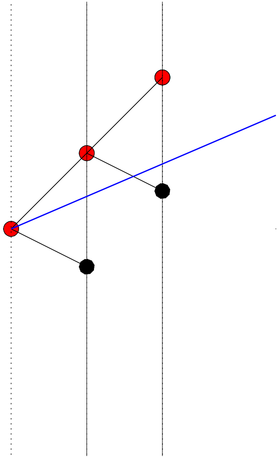
Marches aléatoires branchantes avec barrière



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- $\varepsilon > 0$

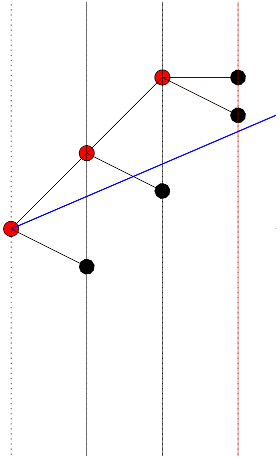
Marches aléatoires branchantes avec barrière



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- $\varepsilon > 0$

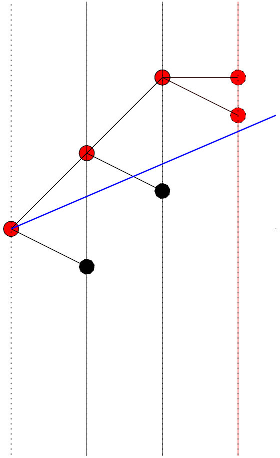
Marches aléatoires branchantes avec barrière



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- $\varepsilon > 0$

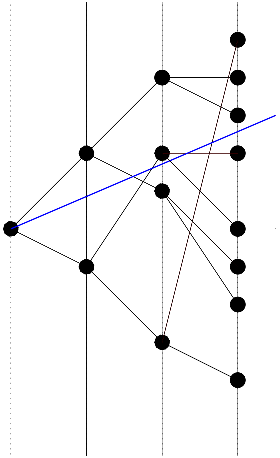
Marches aléatoires branchantes avec barrière



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- $\varepsilon > 0$

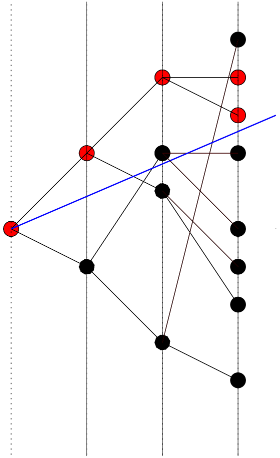
Marches aléatoires branchantes avec barrière



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- $\varepsilon > 0$

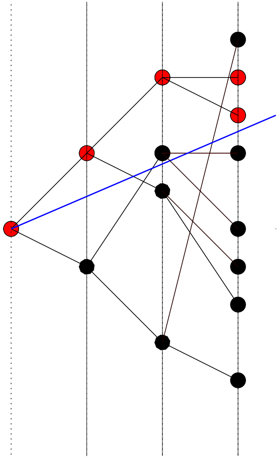
Marches aléatoires branchantes avec barrière



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- $\varepsilon > 0$

Marches aléatoires branchantes avec barrière



Deux paramètres :

- μ : loi des pas.
- $\varepsilon > 0$: on tue les particules en dessous de $(v^{\infty} - \varepsilon)t$.

Probabilité de survie

On note $\rho(\varepsilon)$ la probabilité de survie.

Théorème (Gantert, Hu et Shi (2009))

On suppose l'existence de $t^* > 0$ tel que :

$$t^* \psi'(t^*) = \psi(t^*).$$

Probabilité de survie

On note $\rho(\varepsilon)$ la probabilité de survie.

Théorème (Gantert, Hu et Shi (2009))

On suppose l'existence de $t^* > 0$ tel que :

$$t^*\psi'(t^*) = \psi(t^*).$$

Alors :

$$\ln \rho(\varepsilon) \sim -\sqrt{\frac{\chi(\mu)}{\varepsilon}}.$$

Ce modèle a également été étudié par Derrida et Simon (2007, 2008).

Plan

1. Modèles et résultats
   - Marches aléatoires branchantes
   - Marches aléatoires branchantes avec compétition
   - Marches aléatoires branchantes avec barrière
2. Preuves
   - Probabilité de survie dans le modèle avec barrière
   - Vitesse dans le modèle avec compétition
3. Conjectures

Preuves de $\ln(\rho(\varepsilon)) \sim -\chi(\mu)^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$

Preuve de Gantert, Hu et Shi (2009). Méthode des moments.

Preuves de $\ln(\rho(\varepsilon)) \sim -\chi(\mu)^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$

Preuve de Gantert, Hu et Shi (2009). Méthode des moments.
On note X_t le nombre de particules à l'instant t.

Preuves de $\ln(\rho(\varepsilon)) \sim -\chi(\mu)^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$

Preuve de Gantert, Hu et Shi (2009). Méthode des moments.
On note X_t le nombre de particules à l'instant t.

- Majoration. On a :

$$\rho(\varepsilon) \quad \leq \quad E(X_t)$$

Preuves de $\ln(\rho(\varepsilon)) \sim -\chi(\mu)^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$

Preuve de Gantert, Hu et Shi (2009). Méthode des moments.
On note X_t le nombre de particules à l'instant t.

- Majoration. On a :

$$\begin{aligned} \rho(\varepsilon) &\leq E(X_t) \\ &= E(Y_t) + E(Z_t) \end{aligned}$$

où Y_t est le nombre de particules qui sont allées très haut et Z_t est le nombre de particules qui ne sont pas allées très à haut (et qui sont donc restées confinées).

Preuves de $\ln(\rho(\varepsilon)) \sim -\chi(\mu)^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$

Preuve de Gantert, Hu et Shi (2009). Méthode des moments.
On note X_t le nombre de particules à l'instant t.

- Majoration. On a :

$$\begin{aligned} \rho(\varepsilon) &\leq E(X_t) \\ &= E(Y_t) + E(Z_t) \end{aligned}$$

  où Y_t est le nombre de particules qui sont allées très haut et Z_t est le nombre de particules qui ne sont pas allées très à haut (et qui sont donc restées confinées).

- Minoration : moments d'ordre 2.

Preuves de $\ln(\rho(\varepsilon)) \sim -\chi(\mu)^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$

Preuve de Bérard et G. (2010).

- On note $q(x)$ la probabilité de survie en partant d'une particule située en x.

Preuves de $\ln(\rho(\varepsilon)) \sim -\chi(\mu)^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$

Preuve de Bérard et G. (2010).

- On note $q(x)$ la probabilité de survie en partant d'une particule située en x.
- Par Markov, q vérifie une équation fonctionnelle.

Preuves de $\ln(\rho(\varepsilon)) \sim -\chi(\mu)^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$

Preuve de Bérard et G. (2010).

- On note $q(x)$ la probabilité de survie en partant d'une particule située en x.
- Par Markov, q vérifie une équation fonctionnelle.
- On construit des sous-solutions et des sur-solutions à partir des solutions de l'équation linéarisée.

Preuve de $v^N \approx v^\infty - \chi(\mu)(\ln N)^{-2}$

- On considère des marches branchantes avec compétition et avec barrière issues de N particules en 0.

Preuve de $v^N \approx v^\infty - \chi(\mu)(\ln N)^{-2}$

- On considère des marches branchantes avec compétition et avec barrière issues de N particules en 0.
- On pose :

$$\varepsilon^N = \inf\{\varepsilon : N\rho(\varepsilon) \geq 1\}.$$

Preuve de $v^N \approx v^\infty - \chi(\mu)(\ln N)^{-2}$

- On considère des marches branchantes avec compétition et avec barrière issues de N particules en 0.
- On pose :
$$\varepsilon^N = \inf\{\varepsilon : N\rho(\varepsilon) \geq 1\}.$$
- On a :
$$v^N \quad \approx \quad v^\infty - \varepsilon^N.$$

Preuve de $v^N \approx v^\infty - \chi(\mu)(\ln N)^{-2}$

- On considère des marches branchantes avec compétition et avec barrière issues de N particules en 0.
- On pose :

$$\varepsilon^N = \inf\{\varepsilon : N\rho(\varepsilon) \geq 1\}.$$

- On a :

$$v^N \quad \approx \quad v^\infty - \varepsilon^N.$$

- Par le résultat de Gantert, Hu et Shi, on a :

$$\varepsilon^N \approx \chi(\mu)(\ln N)^{-2}.$$

Plan

Conjectures

Conjectures de Brunet, Derrida, Mueller et Munier (2006, 2007) et Brunet, Derrida et Simon (2008) :

- $$v^N \approx v^\infty - \frac{\chi(\mu)}{(\ln N)^2} - 6\frac{\chi(\mu)\ln(\ln N))}{(\ln N)^3}.$$
- Le coalescent associé à la généalogie du modèle avec compétition renormalisée en temps par $(\ln N)^3$ converge vers le coalescent de Bolthausen-Sznitman. Prouvé sur un modèle continu avec barrière par Berestycki, Berestycki et Schweinsberg (2010).

Condition en t^*

Rappel :

$$\psi(t) = \ln\left(\int 2\exp(tx)\mu(dx)\right)$$

et

$$v^\infty = \inf\left\{\frac{\psi(t)}{t}, t > 0\right\}.$$

Lemme

Pour tout $t^* > 0$,

$$\frac{\psi(t^*)}{t^*} = \psi'(t^*)$$

équivaut à

$$\frac{\psi(t^*)}{t^*} = v^\infty$$

Condition en t^*

On note M la borne supérieure essentielle d'une variable aléatoire de loi μ.

Lemme

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- *Il existe $t^* > 0$ tel que*

$$\frac{\psi(t^*)}{t^*} = \psi'(t^*)$$

- $v^\infty < M$.
- $\mu(\{M\}) < 1/2$.