Estimation adaptative pour un modèle à volatilité stochastique à temps discret

Fabienne Comte [1] Claire Lacour [2] Yves Rozenholc [1]

[1]Université Paris 5, [2]Université Paris 11

Modèle

Modèle à volatilité stochastique discret

$$\begin{cases} Y_i = \exp(X_i/2)\eta_i \\ X_{i+1} = b(X_i) + \sigma(X_i)\xi_{i+1} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} Z_i = X_i + \varepsilon_i \\ X_{i+1} = b(X_i) + \sigma(X_i)\xi_{i+1} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n+1$$

avec

- $(X_i)_{i\geq 0}$ stationnaire — inconnu
- ε_i bruit i.i.d., indépendant de (X_i). — connu

But

Estimation de b (et σ^2) à partir des données $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n+1}$.

autorégression avec erreurs sur les variables, HMM

Hypothèses

- (X_i) stationnaire de densité inconnue f
- (X_i) geometriquement β-mélangeant.

- ε_i i.i.d. avec $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathbb{E}(\varepsilon_i^2) = s_\varepsilon^2$
- (ε_i) a une densité connue $f_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$
- (ε_i) indépendant de (X_i)

- ξ_i i.i.d. avec $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$, $\mathbb{E}(\xi_i^2) = 1$, $\mathbb{E}(\xi_i^3) = 0$
- (ξ_i) et (ε_i) indépendants

Estimation de b

Modèle $\begin{cases} Z_i = X_i + \varepsilon_i & \qquad i = 1, \ldots, n+1 \\ X_{i+1} = b(X_i) + \sigma(X_i)\xi_{i+1} \end{cases}$

Autorégression classique :

- minimiser un contraste moindres carrés $\sum_{i=1}^{n}[X_{i+1} - t(X_i)]^2$
- estimateur quotient (Nadaraya-Watson)

$$b(x) = \mathbb{E}(X_{i+1}|X_i = x) = \frac{\mathbb{E}(X_{i+1}\mathbb{1}_x(X_i))}{f(x)} = \frac{bf(x)}{f(x)}$$

Comme les X_i sont inconnus, on choisit la deuxième solution.

Procédure d'estimation

3 étapes :

- estimer f (densité de X_i) $\rightsquigarrow \tilde{f}$
- estimer $l = bf \rightsquigarrow \tilde{l}$
- calculer $\tilde{b} = \tilde{l}/\tilde{f}$

Méthode :
Estimateurs de projection, sélection de modèle

Estimateur de la densité f

$$\hat{f}_m = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{a}_j \varphi_j$$

où $\varphi_j(x) = \sqrt{m}\dfrac{\sin(\pi(mx-j))}{\pi(mx-j)}, \quad m \in \{1, \ldots, m_n\}$

- Si les X_i étaient connus : $\hat{a}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varphi_j(X_i)$
- Mais seuls les $Z_i = X_i + \varepsilon_i$ sont observés : trouver v_t tel que $\forall t \quad \mathbb{E}[v_t(Z_i)] = \mathbb{E}[t(X_i)] \to v_t^* = t^*/f_\varepsilon^*(-.)$
  où t^* est la transformée de Fourier de t

  $\Rightarrow \hat{a}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n v_{\varphi_j}(Z_i)$

Adaptation

$$\mathbb{E}\|f-\hat{f}_m\|^2 = \underbrace{\|f-\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\varphi_j\|^2}_{\substack{\text{Biais} \\ \|f\|^2-\sum_{j\in\mathbb{Z}}|a_j|^2}} + \underbrace{\mathbb{E}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|a_j-\hat{a}_j|^2}_{\substack{\text{Variance} \\ \frac{1}{n}\int_{-\pi m}^{\pi m}\frac{dx}{|f_\varepsilon^*(x)|^2}}}$$

Sélection de modèle :

$$\hat{m}_f = \arg\min_{1\leq m\leq m_n}\left\{-\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\hat{a}_j|^2 + \frac{\kappa_1 m^\theta}{n}\int_{-\pi m}^{\pi m}\frac{dx}{|f_\varepsilon^*(x)|^2}\right\}$$

où $\theta = \inf\left(\delta, \left(\frac{3\delta-1}{2}\right)_+\right)$, δ décroissance exponentielle de f_ε^*

Estimateur $\tilde{f} = \hat{f}_{\hat{m}_f}$

Estimateur de $l = bf$

$$\hat{l}_m = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{b}_j \varphi_j$$

avec $\hat{b}_j$ estimateur de

$$\int (bf)\varphi_j = \mathbb{E}(b(X_i)\varphi_j(X_i)) = \mathbb{E}(X_{i+1}\varphi_j(X_i))$$

- Si les X_i étaient connus : $\hat{b}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_{i+1}\varphi_j(X_i)$
- Mais seuls les $Z_i = X_i + \varepsilon_i$ sont observés : utiliser v_t tel que $v_t^* = t^*/f_\varepsilon^*(-.)$

  $\Rightarrow \hat{b}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_{i+1} v_{\varphi_j}(Z_i)$

Risque pour $\hat{l}_m$

$$\mathbb{E}\|l-\hat{l}_m\|^2 = \underbrace{\|l-\sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j\varphi_j\|^2}_{\text{Biais}} + \underbrace{\mathbb{E}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|b_j-\hat{b}_j|^2}_{\text{Variance}}$$

Variance $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_{i+1}v_{\varphi_j}(Z_i)-\int(bf)\varphi_j|^2$

$$\leq 3\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varepsilon_{i+1}v_{\varphi_j}(Z_i)\right|^2 + 3\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_{i+1}\sigma(X_i)v_{\varphi_j}(Z_i)\right|^2$$

$$+3\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b(X_i)v_{\varphi_j}(Z_i)-\int(bf)\varphi_j\right|^2$$

$$\leq C[s_\varepsilon^2+\mathbb{E}(\sigma^2(X_1))+\mathbb{E}(b^2(X_1))]\frac{\int_{-\pi m}^{\pi m}|f_\varepsilon^*(x)|^{-2}dx}{n}$$

Adaptation

Sélection de modèle : $\hat{m}_l = \underset{1 \leq m \leq m_n}{\arg\min} \{ -\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{b}_j|^2 + \text{pen}(m) \}$
avec

$$\text{pen}(m) = \kappa_2 \frac{\mathbb{E}(Z_2^2)}{n} m^\theta \int_{-\pi m}^{\pi m} \frac{dx}{|f_\varepsilon^*(x)|^2}$$

Modèle maximal : tel que $\text{pen}(m_n) \leq 1 \Rightarrow m_n \leq C(\ln n)^{1/\delta}$

Estimateur $\tilde{l} = \hat{l}_{\hat{m}_l}$

Estimateur de b

Hypothèse supplémentaire

- b est borné sur un compact B (domaine d'estimation)
- $\forall x \in B \quad 0 < f_0 \leq f(x) \leq f_1 \leq \infty$

Estimateur

$$\tilde{b} = \begin{cases} \dfrac{\tilde{l}}{\tilde{f}} & \text{si } \|\tilde{l}/\tilde{f}\| \leq n^{2/3}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Régularités

On note t^* la transformée de Fourier de t

- $|f_\varepsilon^*(x)| \asymp (x^2+1)^{-\gamma/2} \exp(-\mu|x|^\delta)$
  avec $\delta \geq 0, b > 0$, $\gamma \geq 0$ ($\gamma > 1/2$ si $\delta = 0$)

$$\begin{cases} \delta = 0 & \text{« ordinary smooth »} \\ \delta > 0 & \text{« supersmooth »} \end{cases}$$

- Pour $g = f$ ou bf
  $\int |g^*(x)|^2 (x^2+1)^{s(g)} \exp(2a(g)|x|^{r(g)}) dx \leq A(g)$
  avec $r(g) \geq 0, a(g) > 0, s(g) \geq 0$, ($s(g) > 0$ si $r(g) = 0$)

$$\begin{cases} r(g) = 0 & \text{« ordinary smooth »} \\ r(g) > 0 & \text{« supersmooth »} \end{cases}$$

Risque pour $l = bf$

Théorème

Si $\mathbb{E}(b^8(X_1))$, $\mathbb{E}(\sigma^8(X_1))$, $\mathbb{E}(\xi_1^8)$, $\mathbb{E}(\varepsilon_1^6)$ *finis*

$$\mathbb{E}\|\tilde{l} - l\|^2 \leq C \inf_{1 \leq m \leq m_n} \left(\|l - l_m\|^2 + \mathrm{pen}(m)\right) + \frac{C'}{n}.$$

- Biais $\|l - l_m\|^2 \leq Cm^{-2s(l)} \exp(-2a(\pi m)^{r(l)})$
- Variance $\|l_m - \tilde{l}\|^2 \leq Cm^{2\gamma+1-\delta} \exp(2\mu(\pi m)^{\delta})$
- Penalité $\mathrm{pen}_l(m) \leq C\ m^{\theta}\ m^{2\gamma+1-\delta} \exp(2\mu(\pi m)^{\delta})$

Vitesse de convergence pour l

	$\delta = 0$ bruit ordinary smooth	$\delta > 0$ bruit supersmooth
$r = 0$ l Sobolev(s)	$n^{-\frac{2s}{2s+2\gamma+1}}$	$(\ln n)^{-\frac{2s}{\delta}}$
$r > 0$ l analytique	$\frac{(\ln n)^{\frac{2\gamma+1}{r}}}{n}$	$\frac{(\ln n)^x}{n} < . < (\ln n)^{-y}$

perte logarithmique (dû à m^θ) quand $r \geq \delta > 1/3$

Même résultat pour f

Risque pour b

Théorème

Si $s(f) > 1/2$ *(régularité de* f*) et*
$\ln\ln(n) \leq m_n \leq (n/\ln n)^{1/(2\gamma+1)}$*, pour* n *assez grand,*

$$\mathbb{E}\|(\tilde{b} - b)\mathbb{1}_B\|^2 \leq C_1\mathbb{E}\|\tilde{f} - f\|^2 + C_2\mathbb{E}\|\tilde{l} - l\|^2 + \frac{C_3}{n}$$

Vitesses de convergence dépendant de

$$\begin{cases} \gamma, \delta \ (\text{bruit } \varepsilon_i) \\ s(f), r(f) \quad (f \text{ densité de } X_i) \\ s(l), r(l) \quad (l = bf) \end{cases}$$

Exemple 1

- $X_{i+1} = b(X_i) + \sigma(X_i)\xi_{i+1}$ $\begin{cases} b(x) = -0.25(x + 2\exp(-16x^2)) \\ \sigma(x) = 0.1 + 0.2\exp(-2x^2) \\ \xi \sim \mathcal{N}(0,1) \end{cases}$

- $Z_i = X_i + \varepsilon_i$
  avec ε_i gaussienne d'écart-type $s_\varepsilon = 0.1$

Exemple 1

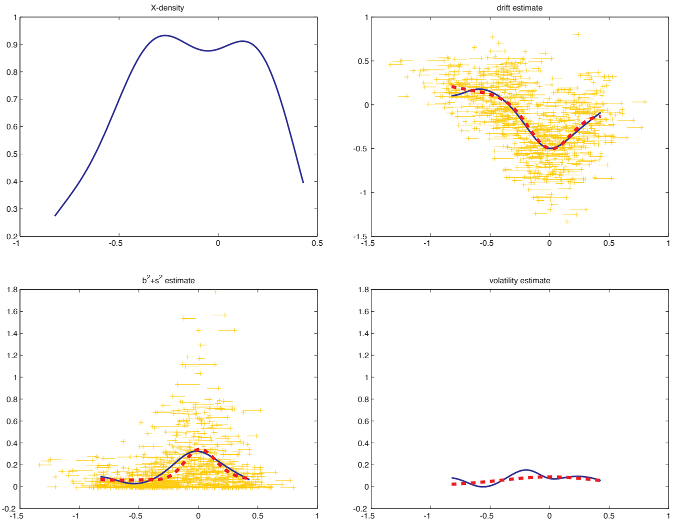

FIG.: Vraies fonctions (pointillés) et estimateurs (trait plein), $n = 800$

Exemple 2

- $X_{i+1} = b(X_i) + \sigma(X_i)\xi_{i+1}$
  avec
  $$\begin{cases} b(x) = 1/(1+e^{-x}) \\ \sigma(x) = 0.3\phi(x+1.2) + 0.5\phi(x-1.2) & \qquad \phi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi} \\ \xi \sim \mathcal{N}(0,1) \end{cases}$$

- $Z_i = X_i + \varepsilon_i$
  avec ε_i Laplace de variance $s_\varepsilon^2 = 0.1$

Exemple 2

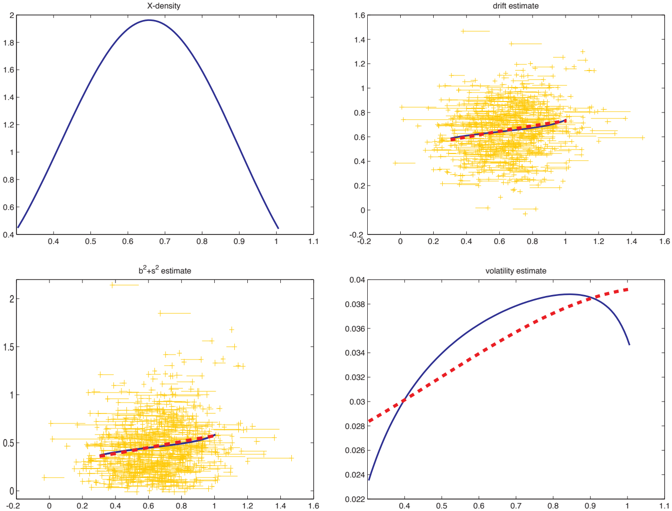

FIG.: Vraies fonctions (pointillés) et estimateurs (trait plein), $n = 800$

Example 3

- $X_{i+1} = b(X_i) + \sigma(X_i)\xi_{i+1}$
  avec $\begin{cases} b(x) = 0.25\sin(2\pi x + \pi/3) \\ \sigma(x) = 0.1 + 0.3\exp(-5x^2) \\ \xi \sim \mathcal{N}(0,1) \end{cases}$

- $Z_i = X_i + \varepsilon_i$
  avec ε_i Laplace de variance $s_\varepsilon^2 = 0.1$

Exemple 3

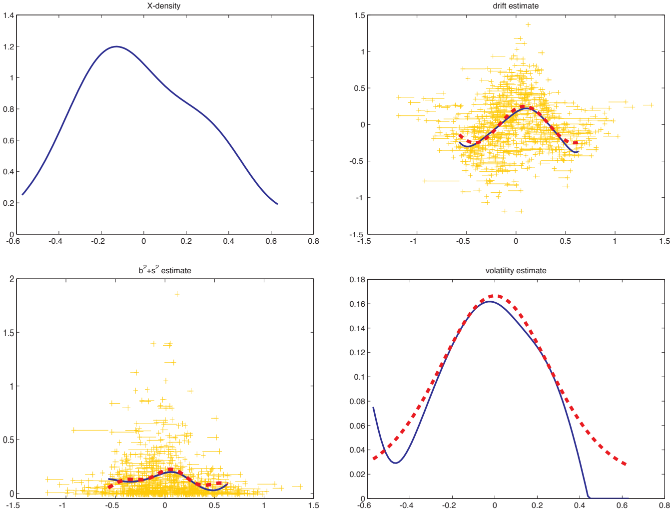

FIG.: Vraies fonctions (pointillés) et estimateurs (trait plein), $n = 800$

FIN