Modélisation de propagation de fissure par un PDMP

Romain Azaïs [♭ ♮], Anne Gégout-Petit [♭ ♮], Marie Touzet [♯]

♭ : IMB – ♮ : Equipe CQFD, INRIA – ♯ : LMP

Projet ANR FauToCoES

Journées MAS 2010

Plan

INRIA

Loi de Paris-Erdogan (propagation de fissure)

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = C(\Delta\sigma\sqrt{\pi})^m \cos\left(\frac{\pi}{\omega}u\right)^{-\frac{m}{2}} u^{\frac{m}{2}} \qquad \text{(P-E)}$$

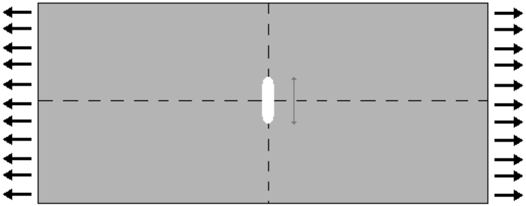
$\hookrightarrow$ évolution déterministe

Loi de Paris-Erdogan (propagation de fissure)

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = C(\Delta\sigma\sqrt{\pi})^m \cos\left(\frac{\pi}{\omega}u\right)^{-\frac{m}{2}} u^{\frac{m}{2}} \qquad \text{(P-E)}$$

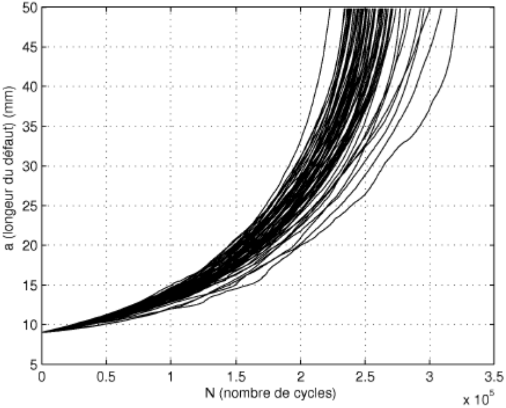
$\hookrightarrow$ évolution déterministe

Expérience de Virkler



$\Delta\sigma = 48.28\text{MPa}$ et $\omega = 152.4\text{mm}$

Données expérimentales de Virkler



$\hookrightarrow$ dispersion importante !

PDMP : processus hybride

$$X_t = (\nu_t, \zeta_t)$$

- $\nu_t \in K$: le mode, un processus de saut
- $\zeta_t \in F_{\nu_t}$: le vecteur des variables physiques

PDMP : processus hybride

$$X_t = (\nu_t, \zeta_t)$$

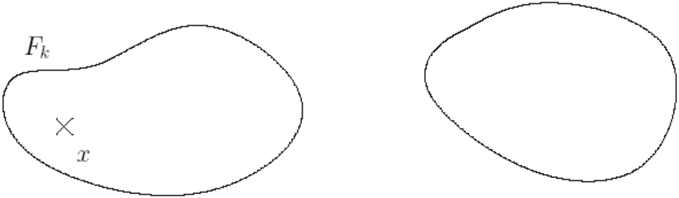
- $\nu_t \in K$: le mode, un processus de saut
- $\zeta_t \in F_{\nu_t}$: le vecteur des variables physiques

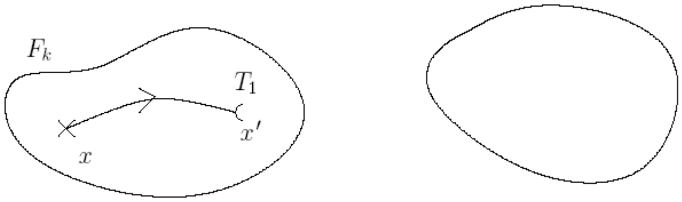
E : espace d'états de (X_t)

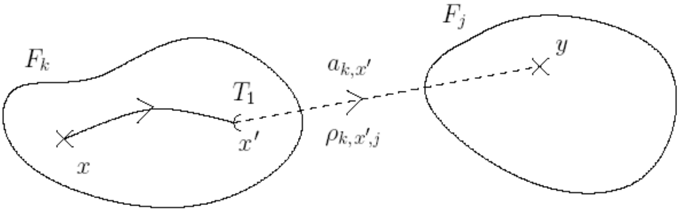
- K : espace d'états du mode, fini ou dénombrable
- Pour tout $k \in K$, F_k : ouvert de $\mathbb{R}^{d_k}$

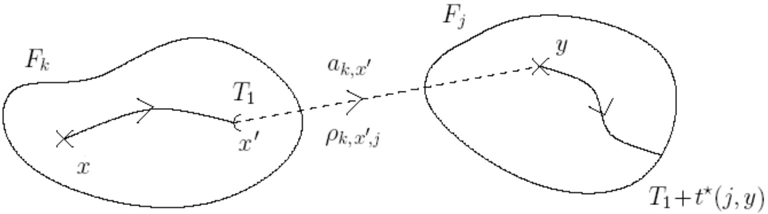
$$\hookrightarrow E = \bigcup_{k \in K} \{k\} \times F_k$$

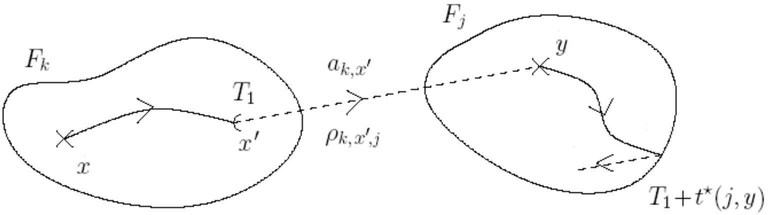
INRIA


F_k
x


F_k
T_1
x
x'


F_k
x
T_1
x'
$a_{k,x'}$
$\rho_{k,x',j}$
F_j
y


F_k
T_1
x'
x
$a_{k,x'}$
$\rho_{k,x',j}$
F_j
y
$T_1+t^\star(j,y)$


F_k
x
T_1
x'
$a_{k,x'}$
$\rho_{k,x',j}$
F_j
y
$T_1+t^\star(j,y)$

Dynamique de (X_t)

à $t = 0$, $X_0 = (k, x)$

1 - Evolution déterministe pendant un temps aléatoire

$$\forall 0 \leq t < S_1,\ \zeta_t = \phi_k(0, x, t)$$

avec $\mathbb{P}(S_1 > s) = \exp\left\{ - \int_0^s \lambda\big((k, \zeta_r)\big)\mathrm{d}r \right\} \mathbb{1}_{[0, t^\star(k,x)[}(s)$

2 - Transition markovienne

x' : limite à gauche de (ζ_t) en $T_1 = S_1$

à $t = T_1$,

- saut du mode selon $a_{k,x'}$: $\nu_{T_1} = j$
- saut de la variable physique selon $\rho_{k,x',j}$: $\zeta_{T_1} = y$

Dynamique de (X_t)

à $t = 0$, $X_0 = (k, x)$

1 - Evolution déterministe pendant un temps aléatoire

$$\forall 0 \leq t < S_1, \; \zeta_t = \phi_k(0, x, t)$$

avec $\mathbb{P}(S_1 > s) = \exp\left\{ -\int_0^s \lambda((k, \zeta_r))\mathrm{d}r \right\} \mathbb{1}_{[0, t^\star(k,x)[}(s)$

2 - Transition markovienne

x' : limite à gauche de (ζ_t) en $T_1 = S_1$

à $t = T_1$,

- saut du mode selon $a_{k,x'}$: $\nu_{T_1} = j$
- saut de la variable physique selon $\rho_{k,x',j}$: $\zeta_{T_1} = y$

Dynamique de (X_t) (suite)

à $t = T_1$, $X_{T_1} = (j, y)$

1 bis - Evolution déterministe pendant un temps aléatoire

$$\forall 0 \leq t < S_2, \; \zeta_{T_1+t} = \phi_j(0, y, t)$$

avec $\mathbb{P}(S_2 > s) = \exp\left\{ -\int_0^s \lambda\big((j, \zeta_{T_1+r})\big)\mathrm{d}r \right\} \mathbb{1}_{[0, t^\star(j,y)[}(s)$

2 bis - Transition markovienne

y' : limite à gauche de (ζ_t) en $T_2 = T_1 + S_2$

à $t = T_2$,

- saut du mode selon $a_{j,y'}$: $\nu_{T_2} = l$
- saut de la variable physique selon $\rho_{j,y',l}$

Et ainsi de suite !

INRIA

Dynamique de (X_t) (suite)

à $t = T_1$, $X_{T_1} = (j, y)$

1 bis - Evolution déterministe pendant un temps aléatoire

$$\forall 0 \leq t < S_2,\ \zeta_{T_1+t} = \phi_j(0, y, t)$$

avec $\mathbb{P}(S_2 > s) = \exp\left\{ -\int_0^s \lambda((j, \zeta_{T_1+r}))\,\mathrm{d}r \right\} \mathbb{1}_{[0, t^\star(j,y)[}(s)$

2 bis - Transition markovienne

y' : limite à gauche de (ζ_t) en $T_2 = T_1 + S_2$

à $t = T_2$,

- saut du mode selon $a_{j,y'}$: $\nu_{T_2} = l$
- saut de la variable physique selon $\rho_{j,y',l}$

Et ainsi de suite !

Dynamique de (X_t) (suite)

à $t = T_1$, $X_{T_1} = (j, y)$

1 bis - Evolution déterministe pendant un temps aléatoire

$$\forall 0 \leq t < S_2, \ \zeta_{T_1+t} = \phi_j(0, y, t)$$

avec $\mathbb{P}(S_2 > s) = \exp\left\{ -\int_0^s \lambda((j, \zeta_{T_1+r}))\mathrm{d}r \right\} \mathbb{1}_{[0,t^\star(j,y)[}(s)$

2 bis - Transition markovienne

y' : limite à gauche de (ζ_t) en $T_2 = T_1 + S_2$

à $t = T_2$,

- saut du mode selon $a_{j,y'}$: $\nu_{T_2} = l$
- saut de la variable physique selon $\rho_{j,y',l}$

Et ainsi de suite !

Loi de (X_t)

- $\lambda : E \to \mathbb{R}+$: application mesurable
- $\forall i \in K,\ \forall \zeta \in F_i,\ a_{i,\zeta}$: loi sur $K \setminus \{i\}$
- $\forall i \in K,\ \forall \zeta \in F_i,\ \forall j \in K \setminus \{i\},\ \rho_{i,\zeta,j}$: loi sur F_j

Et aussi...

- $\forall k \in K,\ \phi_k$: flot déterministe sur F_k
- $\forall k \in K,\ \forall \zeta \in F_k,\ t^\star(k,\zeta)$: temps d'atteinte de ∂F_k de $\phi_k(0,\zeta,\cdot)$

Loi de (X_t)

- $\lambda : E \to \mathbb{R}+$: application mesurable
- $\forall i \in K, \ \forall \zeta \in F_i, \ a_{i,\zeta}$: loi sur $K \setminus \{i\}$
- $\forall i \in K, \ \forall \zeta \in F_i, \ \forall j \in K \setminus \{i\}, \ \rho_{i,\zeta,j}$: loi sur F_j

Et aussi...

- $\forall k \in K, \ \phi_k$: flot déterministe sur F_k
- $\forall k \in K, \ \forall \zeta \in F_k, \ t^\star(k, \zeta)$: temps d'atteinte de ∂F_k de $\phi_k(0, \zeta, \cdot)$

Plan

Données de Virkler

68 courbes : $\left\{ \left(N_q^{(k)}, a_q^{(k)}\right)_{1 \leq q \leq 164} \right\}_{1 \leq k \leq 68}$

Données de Virkler

68 courbes : $\left\{(N_q^{(k)}, a_q^{(k)})_{1\leq q\leq 164}\right\}_{1\leq k\leq 68}$

$a_{th}(m_1, C_1, T, m_2, C_2)$: courbe théorique définie par morceaux

$$\forall 0 \leq t < T,\ a_{th}(t) = \phi_{(m_1,C_1)}(0,9,t)$$

$$\forall t \geq T,\quad a_{th}(t) = \phi_{(m_2,C_2)}(T,\alpha,t) \quad \text{avec } \alpha = \phi_{(m_1,C_1)}(0,9,T)$$

$$\phi_{(m,C)} \ :\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = C(\Delta\sigma\sqrt{\pi})^m \cos\left(\frac{\pi}{\omega}y\right)^{-\frac{m}{2}} y^{\frac{m}{2}} \qquad \text{(P-E)}$$

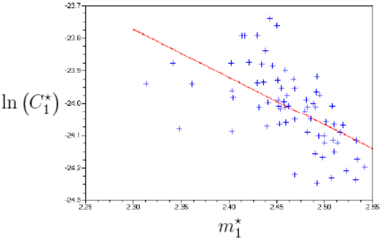
Ajustement par morceaux

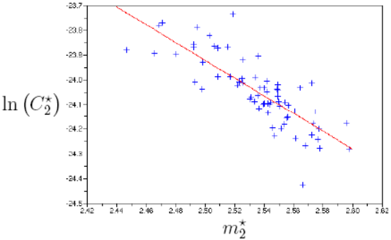
Pour chaque fissure k, on minimise

$$\sum_{q=1}^{164} \left\{ a_q^{(k)} - a_{th}(m_1, C_1, T, m_2, C_2)(N_q^{(k)}) \right\}^2$$

$$\hookrightarrow \ \left(m_1^{(k)\star}, C_1^{(k)\star}, T^{(k)\star}, m_2^{(k)\star}, C_2^{(k)\star}\right)$$

Quelques statistiques des résultats obtenus





Plan

PDMP pour la propagation de fissures

$$\forall t \geq 0, \quad X_t = (\nu_t, \zeta_t)$$

Espace d'états du mode

$$K = \mathcal{M} \times \mathcal{C} \text{ de cardinal fini}$$

Description du PDMP

à $t = 0$, $\nu_0 = (m, C) \in K$ et $\zeta_0 = 9$

1 - Evolution déterministe

$$\forall 0 \leq t < T, \; \zeta_t = \phi_{(m,C)}(0, 9, t)$$

avec $\mathbb{P}(T > s) = \exp\{-\lambda_{(m,C)} s\}$ et $\alpha = \phi_{(m,C)}(0, 9, T)$

Description du PDMP (suite)

à $t = T^-$, $\nu_{T^-} = (m, C)$ et $\zeta_{T^-} = \alpha$

2 - Transition aléatoire

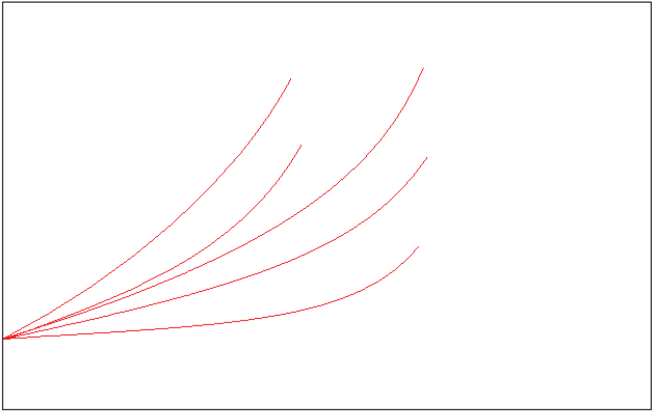
saut du mode selon $a_{(m,C),\cancel{\alpha}}$:

$$\nu_T = (\tilde{m}, \tilde{C}) \in K$$

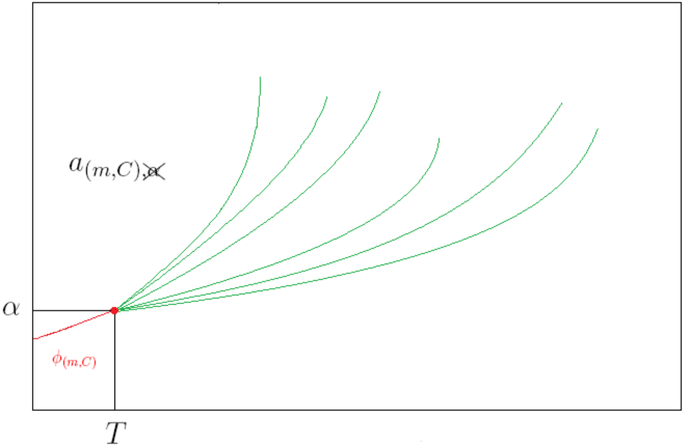
1 bis - Nouvelle évolution déterministe

$$\forall t \geq T,\ \zeta_t = \phi_{(\tilde{m},\tilde{C})}(T, \alpha, t)$$

Loi initiale du mode



Transition du mode



Actualisation

Pour la fissure k, on dispose des l premières mesures

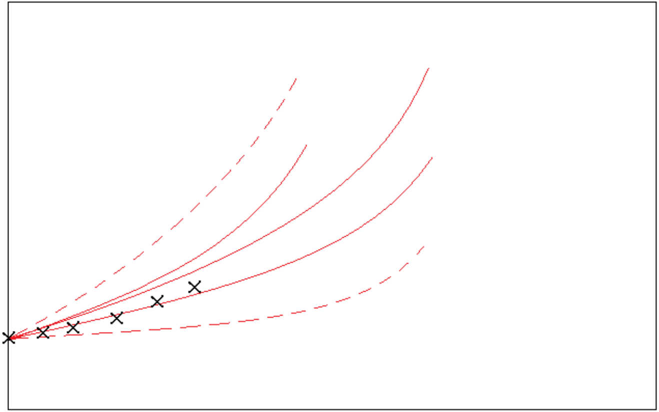
$$(N_q^{(k)}, a_q^{(k)})_{1 \leq q \leq l}$$

Principe d'actualisation $\leftarrow$ modèle général modifié

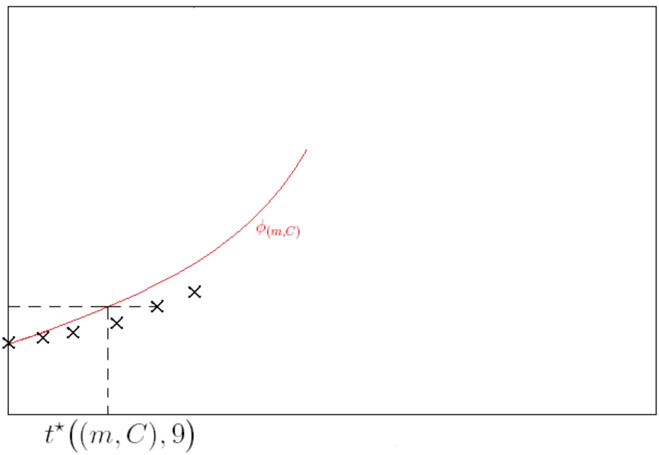
On prend en compte les l mesures :

- nouvelle loi initiale du mode
- saut contraint au bout d'un temps ne dépendant que de ν_0
- nouvelle loi de transition

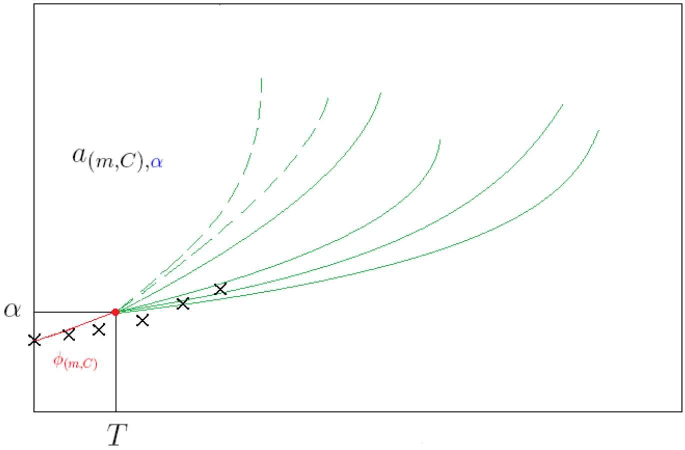
Nouvelle loi initiale du mode



Instant de transition forcée

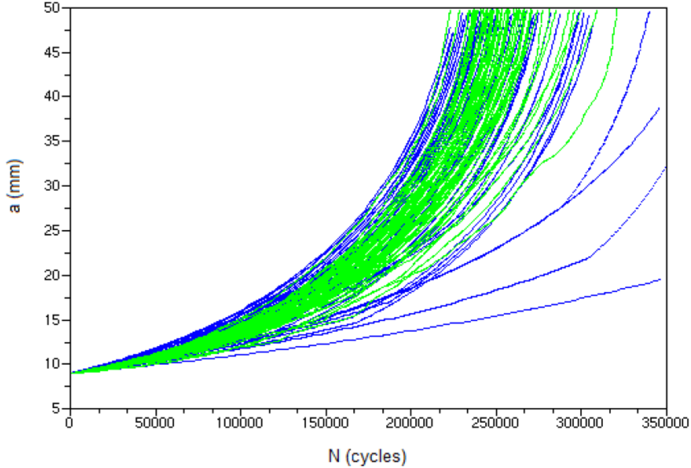


Nouvelle loi de transition



Plan

Simulations



faisceau simulé (Card(K) $= 40$) et données de Virkler

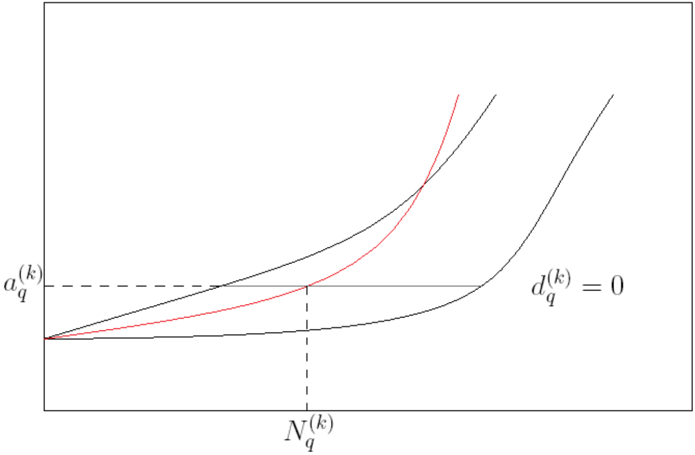
INRIA

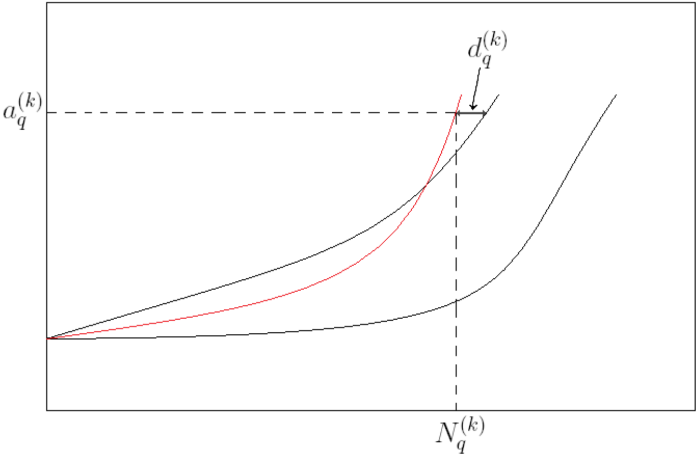
Faisceau simulé selon le principe d'actualisation

$$\mathcal{F}^{(k)} = \left\{ f_1^{(k)}, \ldots, f_{100}^{(k)} \right\} \quad \text{où } f_j^{(k)} : \text{courbe simulée}$$

Critère numérique : *distance* de $\mathcal{F}_k$ à la courbe k

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}^{(k)}, \text{« fissure } k \text{ »}) = \frac{1}{N_Q^{(k)}} \sum_{q=l+1}^{Q} d_q^{(k)}$$


$a_q^{(k)}$
$d_q^{(k)} = 0$
$N_q^{(k)}$

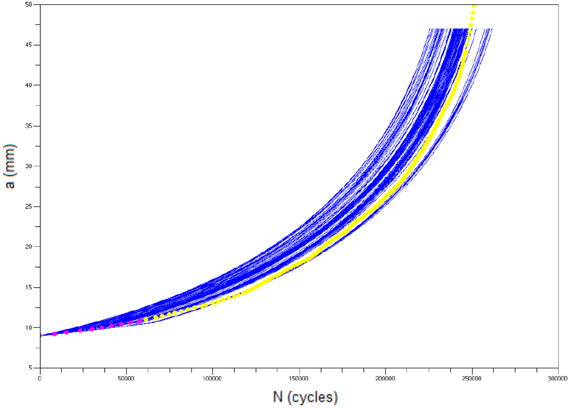

$d_q^{(k)}$
$a_q^{(k)}$
$N_q^{(k)}$

Validation croisée : ***leave one out***

Modèle PDMP avec actualisation – $\mathrm{Card}(K) = 20$

- pour 40% des fissures : $\mathcal{D}(\mathcal{F}^{(k)}, \text{« fissure } k \text{ »}) = 0$
- pour 70% des fissures : $\mathcal{D}(\mathcal{F}^{(k)}, \text{« fissure } k \text{ »}) < 1$
- pour 66% des fissures : $d_Q^{(k)} = 0$

Faisceau de prédiction pour la fissure 67



$$\mathcal{D}(\mathcal{F}^{(67)}, \text{« fissure 67 »}) = 0.018$$

Bibliographie

- J. Chiquet, N. Limnios & M. Eid : **PDMPs applied to fatigue crack growth modelling**, J.S.P.I. 139 (2009) 1657-1667
- M.H.A. Davis : **Piecewise-deterministic Markov Processes : A General Class of Non-diffusion Stochastic Models**, J.R.Statist. Soc. B. (1984), 46, No.3, pp. 353-388
- F. Perrin : **Prise en compte des données expérimentales dans les modèles probabilistes pour la prévision de la durée de vie des structures**, thèse de doctorat
- D.A. Virkler, B.M. Hillberry & P.K. Goel, 1979, **The statistical nature of fatigue crack propagation**, J. Engng Mater Tech , Trans. ASME, 101 : 148-153