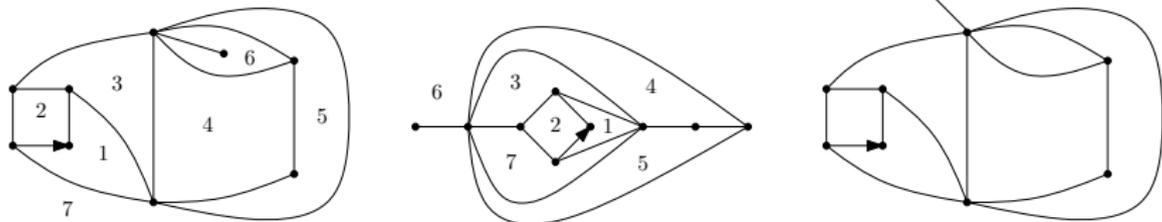


Cartes infinies uniformes du plan

Laurent Ménard – Université Paris X

Journées MAS 2010

Définition d'une carte planeire



- ▶ Carte planeire (finie) : plongement propre d'un graphe connexe dans la sphère \mathbb{S}^2 , à homéomorphisme conservant l'orientation près.
- ▶ Cartes enracinées : on distingue une arête orientée de la carte.
- ▶ Cartes munies de la distance de graphe (modèles de géométrie discrète).
- ▶ \mathbf{Q}_n : ensemble des quadrangulations enracinées à n faces (faces de degré 4). D'après Tutte :

$$|\mathbf{Q}_n| = \frac{2}{n+2} 3^n \text{Cat}_n.$$

Grandes cartes aléatoires

Considérons \mathcal{M}_n un ensemble fini de cartes de paramètre n (nombre de faces, sommets ...).

Soit M_n de loi uniforme sur \mathcal{M}_n , $V(M_n)$ l'ensemble de ses sommets et d_{M_n} sa distance de graphe.

On renormalise d_{M_n} en $d_n = n^{-\alpha} d_{M_n}$. $(V(M_n), d_n)$ est un espace métrique aléatoire.

On cherche α de sorte à avoir la convergence en loi suivante (dans un sens à préciser) :

$$(V(M_n), d_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (S, d).$$

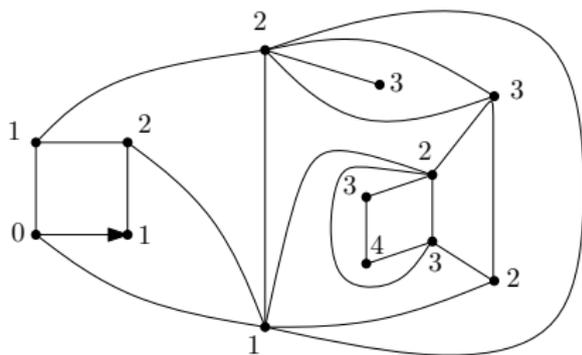
- ▶ si $\alpha = 0$: (S, d) espace métrique discret non compact,
- ▶ si $\alpha > 0$: (S, d) espace métrique continu et compact.

Motivations

- ▶ Combinatoire (Tutte 60) :
 - ▶ problèmes de dénombrement,
 - ▶ théorème des quatre couleurs.
- ▶ Physique théorique :
 - ▶ gravité quantique (grandes cartes planaires comme modèles simples de géométries aléatoires, cf Ambjorn, Durhuus et Jonsson 95),
 - ▶ intégrales matricielles ('t Hooft 74, Brézin, Itzykson, Parisi, Zuber 78).
- ▶ Probabilités
 - ▶ analogie avec le mouvement brownien comme limite continue de chemins discrets,
 - ▶ universalité (conjecturée par les physiciens),
 - ▶ environnements pour étudier la percolation et les marches aléatoires.

Topologie sur les quadrangulations

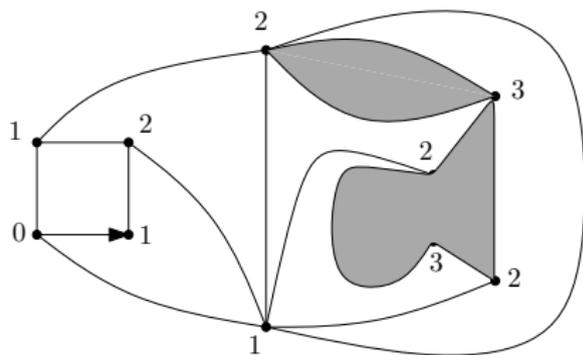
Soit $q \in \mathbf{Q}_f = \bigcup_{n \geq 0} \mathbf{Q}_n$, on définit pour tout $R > 0$, $B_R(q)$: union des faces de q ayant au moins un sommet à distance strictement inférieure à R de la racine.



Topologie sur les quadrangulations

Soit $q \in \mathbf{Q}_f = \bigcup_{n \geq 0} \mathbf{Q}_n$, on définit pour tout $R > 0$, $B_R(q)$: union des faces de q ayant au moins un sommet à distance strictement inférieure à R de la racine.

- ▶ Exemple : $B_2(q)$.



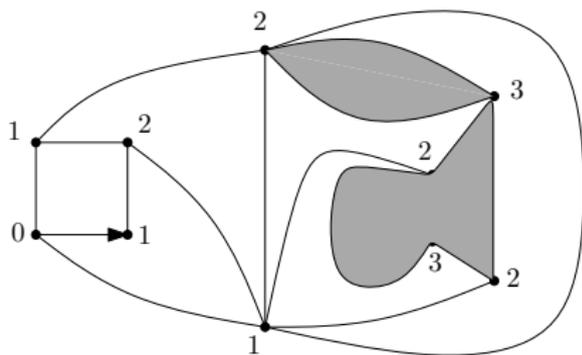
Topologie sur les quadrangulations

Soit $q \in \mathbf{Q}_f = \bigcup_{n \geq 0} \mathbf{Q}_n$, on définit pour tout $R > 0$, $B_R(q)$: union des faces de q ayant au moins un sommet à distance strictement inférieure à R de la racine.

► Exemple : $B_2(q)$.

Pour $q, q' \in \mathbf{Q}_f$:

$$d(q, q') = (1 + \max\{R \geq 0 : B_R(q) = B_R(q')\})^{-1}.$$



Topologie sur les quadrangulations

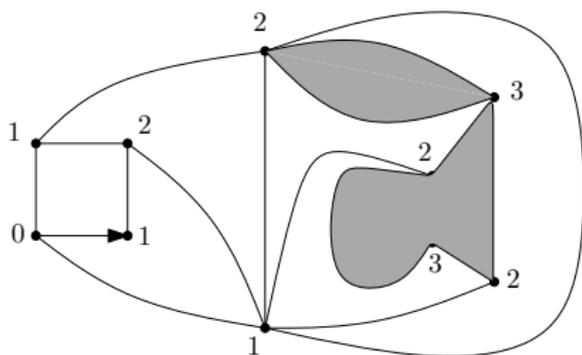
Soit $q \in \mathbf{Q}_f = \bigcup_{n \geq 0} \mathbf{Q}_n$, on définit pour tout $R > 0$, $B_R(q)$: union des faces de q ayant au moins un sommet à distance strictement inférieure à R de la racine.

► Exemple : $B_2(q)$.

Pour $q, q' \in \mathbf{Q}_f$:

$$d(q, q') = (1 + \max\{R \geq 0 : B_R(q) = B_R(q')\})^{-1}.$$

(\mathbf{Q}, d) : complété de (\mathbf{Q}_f, d) ; c'est l'ensemble des quadrangulations enracinées localement finies (espace Polonais).



Quadrangulation infinie uniforme (UIPQ)

Théorème (Krikun 06)

*Pour tout n , soit ν_n la mesure de probabilité uniforme sur \mathbf{Q}_n .
La suite (ν_n) converge faiblement vers une mesure de probabilité ν
pour la topologie locale.*

- ▶ ν : loi de la quadrangulation infinie uniforme.

Quadrangulation infinie uniforme (UIPQ)

Théorème (Krikun 06)

*Pour tout n , soit ν_n la mesure de probabilité uniforme sur \mathbf{Q}_n .
La suite (ν_n) converge faiblement vers une mesure de probabilité ν
pour la topologie locale.*

- ▶ ν : loi de la quadrangulation infinie uniforme.

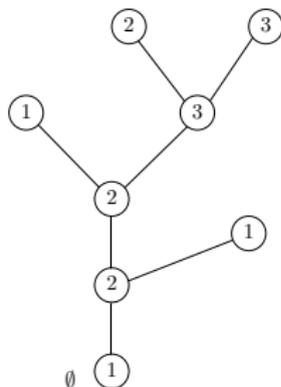
Premières propriétés :

- ▶ invariance en loi par changement de racine ;
- ▶ un seul bout ;

Arbres bien étiquetés

Arbres bien étiquetés : arbres planaires enracinés dont on a étiqueté les sommets en suivant les règles suivantes

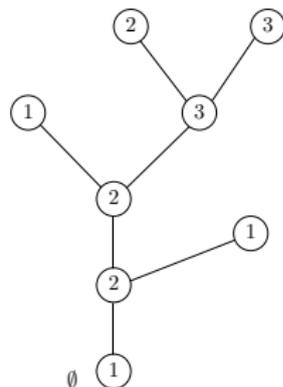
- ▶ toutes les étiquettes sont > 0 ;
- ▶ l'étiquette de la racine est 1 ;
- ▶ si s et s' sont deux sommets voisins, alors $|\ell(s) - \ell(s')| \leq 1$.



Arbres bien étiquetés

Arbres bien étiquetés : arbres planaires enracinés dont on a étiqueté les sommets en suivant les règles suivantes

- ▶ toutes les étiquettes sont > 0 ;
- ▶ l'étiquette de la racine est 1 ;
- ▶ si s et s' sont deux sommets voisins, alors $|\ell(s) - \ell(s')| \leq 1$.

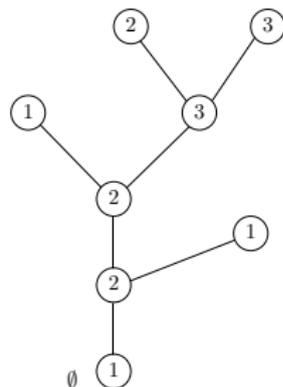


\mathbb{T}_n : ensemble des arbres bien étiquetés à n arêtes. Cet ensemble est en bijection avec \mathbf{Q}_n (Cori-Vauquelin, Schaeffer).

Arbres bien étiquetés

Arbres bien étiquetés : arbres planaires enracinés dont on a étiqueté les sommets en suivant les règles suivantes

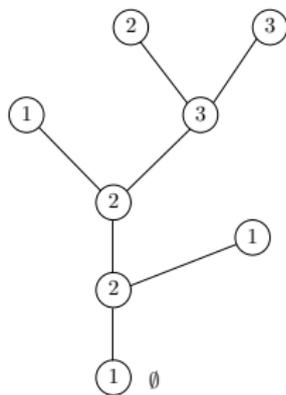
- ▶ toutes les étiquettes sont > 0 ;
- ▶ l'étiquette de la racine est 1 ;
- ▶ si s et s' sont deux sommets voisins, alors $|\ell(s) - \ell(s')| \leq 1$.



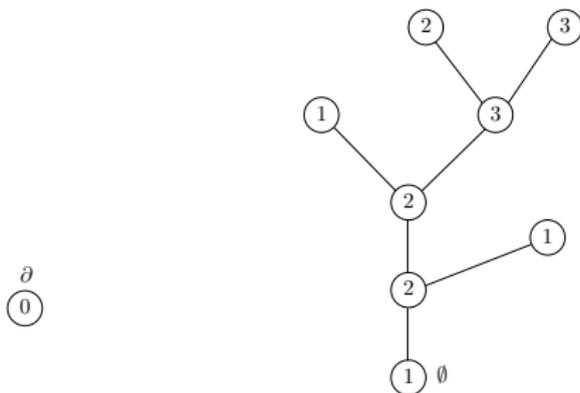
\mathbb{T}_n : ensemble des arbres bien étiquetés à n arêtes. Cet ensemble est en bijection avec \mathbf{Q}_n (Cori-Vauquelin, Schaeffer).

Classes plus générales d'arbres et de cartes : Bouttier-Di Francesco-Guitter (04).

La bijection de Schaeffer



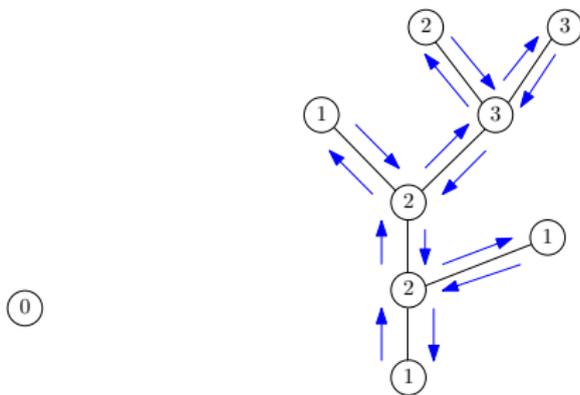
La bijection de Schaeffer



Construction :

- ▶ On ajoute un sommet supplémentaire ∂ d'étiquette 0.

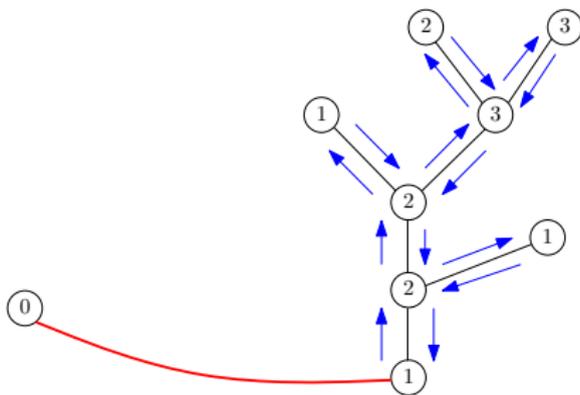
La bijection de Schaeffer



Construction :

- ▶ On ajoute un sommet supplémentaire ∂ d'étiquette 0.
- ▶ On suit le contour de l'arbre.

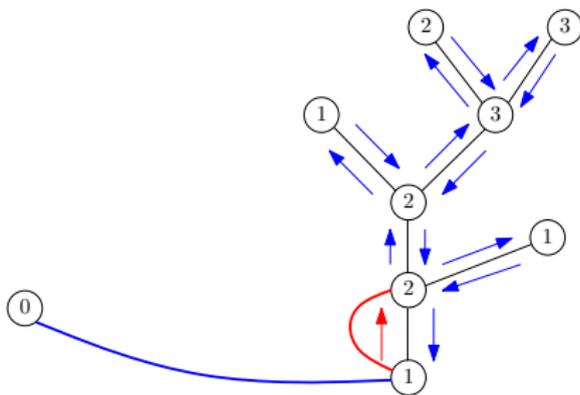
La bijection de Schaeffer



Construction :

- ▶ On ajoute un sommet supplémentaire ∂ d'étiquette 0.
- ▶ On suit le contour de l'arbre.
- ▶ On relie chaque sommet au dernier sommet visité ayant une étiquette strictement plus petite.

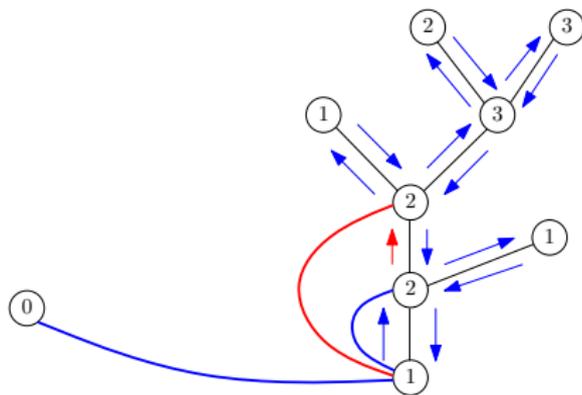
La bijection de Schaeffer



Construction :

- ▶ On ajoute un sommet supplémentaire ∂ d'étiquette 0.
- ▶ On suit le contour de l'arbre.
- ▶ On relie chaque sommet au dernier sommet visité ayant une étiquette strictement plus petite.

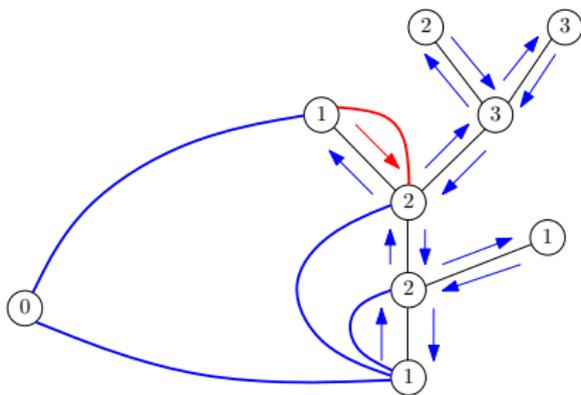
La bijection de Schaeffer



Construction :

- ▶ On ajoute un sommet supplémentaire ∂ d'étiquette 0.
- ▶ On suit le contour de l'arbre.
- ▶ On relie chaque sommet au dernier sommet visité ayant une étiquette strictement plus petite.

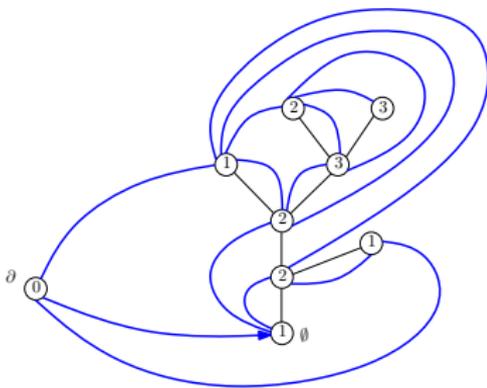
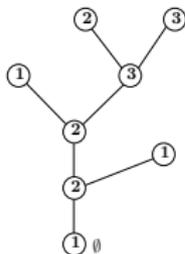
La bijection de Schaeffer



Construction :

- ▶ On ajoute un sommet supplémentaire ∂ d'étiquette 0.
- ▶ On suit le contour de l'arbre.
- ▶ On relie chaque sommet au dernier sommet visité ayant une étiquette strictement plus petite.

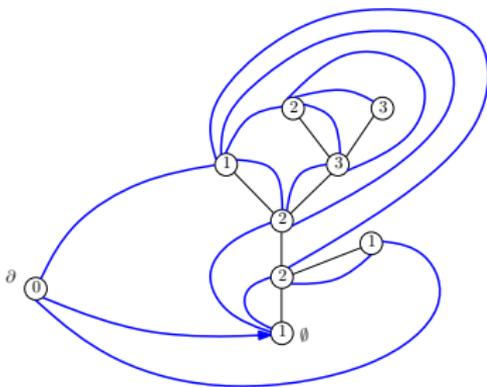
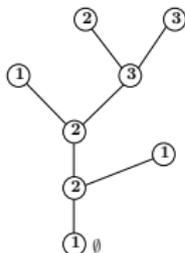
La bijection de Schaeffer



Construction :

- ▶ On ajoute un sommet supplémentaire ∂ d'étiquette 0.
- ▶ On suit le contour de l'arbre.
- ▶ On relie chaque sommet au dernier sommet visité ayant une étiquette strictement plus petite.

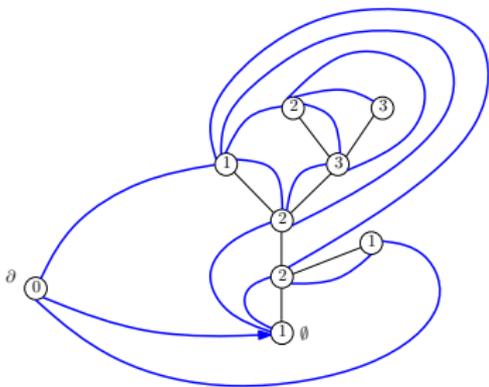
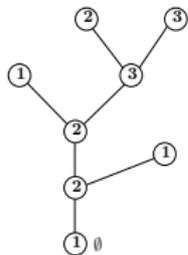
La bijection de Schaeffer



Construction :

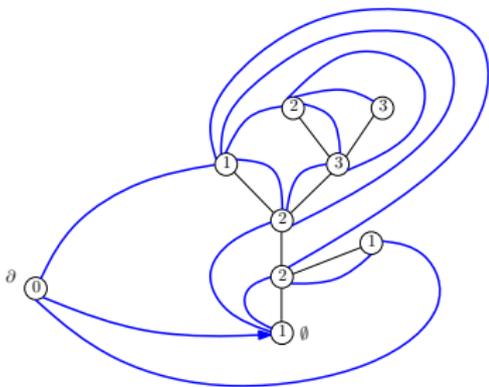
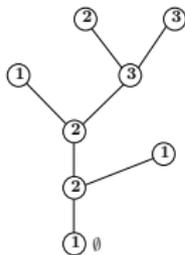
- ▶ On ajoute un sommet supplémentaire ∂ d'étiquette 0.
- ▶ On suit le contour de l'arbre.
- ▶ On relie chaque sommet au dernier sommet visité ayant une étiquette strictement plus petite.
- ▶ La première arête tracée (∂, \emptyset) est la racine.

Points clé de la bijection de Schaeffer



- ▶ Les sommets de l'arbre sont les sommets de la quadrangulation associée (sauf ∂).
- ▶ Les étiquettes de l'arbre sont les distances au sommet racine ∂ dans la quadrangulation associée.

Points clé de la bijection de Schaeffer



- ▶ Les sommets de l'arbre sont les sommets de la quadrangulation associée (sauf ∂).
- ▶ Les étiquettes de l'arbre sont les distances au sommet racine ∂ dans la quadrangulation associée.

Méthode bijective : comprendre les propriétés des arbres pour mieux comprendre celles des cartes.

Arbre bien étiqueté infini uniforme (UIPT)

Théorème (Chassaing-Durhuus 06)

*Pour tout n , soit μ_n la mesure de probabilité uniforme sur \mathbb{T}_n .
La suite (μ_n) converge faiblement vers une mesure de probabilité μ
pour la topologie locale.*

- ▶ μ : loi de l'arbre bien étiqueté infini uniforme.

Arbre bien étiqueté infini uniforme (UIPT)

Théorème (Chassaing-Durhuus 06)

*Pour tout n , soit μ_n la mesure de probabilité uniforme sur \mathbb{T}_n .
La suite (μ_n) converge faiblement vers une mesure de probabilité μ
pour la topologie locale.*

- ▶ μ : loi de l'arbre bien étiqueté infini uniforme.

Propriété importante : μ est à support dans l'ensemble $\mathcal{S} \subset \mathbb{T}$ des arbres

- ▶ ayant une unique branche infinie (tronc) ;
- ▶ ayant un nombre fini de sommets d'étiquette donnée.

Lien entre UIPT et UIPQ

Chassaing-Durhuus (06) : on peut étendre la bijection de Schaeffer en un plongement $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{Q}$.

Théorème (M. 08)

La quadrangulation infinie uniforme est l'image de l'arbre infini uniforme par la bijection de Schaeffer généralisée.

Lien entre UIPT et UIPQ

Chassaing-Durhuus (06) : on peut étendre la bijection de Schaeffer en un plongement $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Q}$.

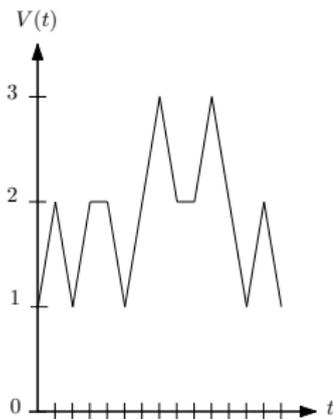
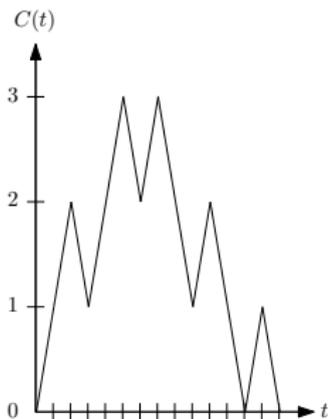
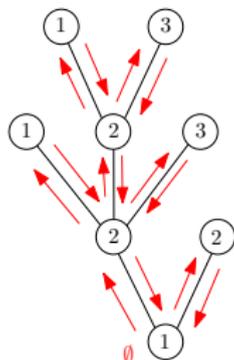
Théorème (M. 08)

La quadrangulation infinie uniforme est l'image de l'arbre infini uniforme par la bijection de Schaeffer généralisée.

- ▶ Φ n'est pas continue : on peut avoir $\theta_n \rightarrow \theta \in \mathcal{S}$ avec θ_n ayant une étiquette $< R$ à une génération $> k(n) \rightarrow \infty$. Dans ce cas $\Phi(\theta_n) \not\rightarrow \Phi(\theta)$.
- ▶ Lemme combinatoire pour se ramener aux arbres uniquement.
- ▶ Étude probabiliste des étiquettes des arbres dans les grandes générations.

Fonctions de contour d'un arbre étiqueté

C_n fonction de contour d'un arbre plan enraciné uniforme à n arêtes ; V_n fonction de contour spatiale :



Aldous :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} C_n(2nt) \right)_{t \in [0,1]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\mathbf{e}_t)_{t \in [0,1]}.$$

Limite d'échelle de l'UIPT

On a la convergence en distribution (Le Gall-Weill 06) :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} C_n(2nt), \left(\frac{9}{8n} \right)^{1/4} V_n(2nt) \right)_{t \in [0,1]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\bar{\mathbf{e}}_t, \bar{Z}_t)_{t \in [0,1]},$$

où $(\bar{\mathbf{e}}, \bar{Z})$: «tête» du serpent brownien conditionné à rester positif.

Limite d'échelle de l'UIPT

On a la convergence en distribution (Le Gall-Weill 06) :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} C_n(2nt), \left(\frac{9}{8n} \right)^{1/4} V_n(2nt) \right)_{t \in [0,1]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\bar{\mathbf{e}}_t, \bar{Z}_t)_{t \in [0,1]},$$

où $(\bar{\mathbf{e}}, \bar{Z})$: «tête» du serpent brownien conditionné à rester positif.

Résultat analogue pour les fonctions de contour de chaque coté du tronc de l'arbre infini uniforme avec comme limite le serpent brownien éternel (Le Gall - M. 2010).

Application : volume des boules de l'UIPQ

Chassaing-Durhuus (06) : $E_\nu [|B_R(q)|] \sim R^4$

Grâce à la convergence des contours de l'UIPT, on démontre :

Théorème (Le Gall-M. 10)

Sous ν :

$$\frac{1}{N^4} |B_{Nr}(q)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} r^4 X$$

en distribution, où X variable aléatoire liée à la mesure d'occupation du serpent brownien éternel.