Règles de minorité sur des graphes

Lucas Gerin
Université Paris-Ouest

Journées MAS 2010

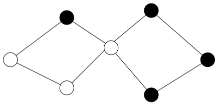
Le modèle

G graphe localement fini. Chaque sommet a un nombre pair de voisins.

Définition

L'Automate Minorité la chaîne de Markov $(\sigma(t))_{t\geq 0}$ *sur* $\{0,1\}^G$, *définie de la façon suivante :*

- *À chaque instant, un sommet est tiré uniformément au hasard.*
- *On le colorie dans l'état minoritaire parmi lui-même et ses voisins.*



Les questions

Pour un graphe G fixé,

- Quels sont les configurations fixes ?
- Lesquelles peuvent être atteintes ?
  - En combien de temps ?

Plan

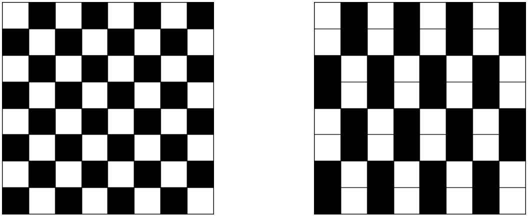
Minorité sur un graphe fini

Minorité sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

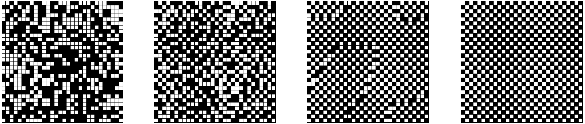
Minorité sur une grille

Pour n pair, on prend comme G la grille torique $\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$.

Deux exemples de configurations fixes :



Minorité sur une grille



$t = 0$ $\quad$ $t = n^2$ $\quad$ $t = 40n^2$ $\quad$ $t = 160n^2$

Soit

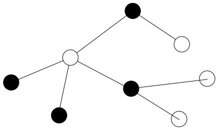
$$T_{\text{fix}} = \inf\{t \geq 0;\ \sigma(t) \text{ est fixe. }\}.$$

Théorème (Régnault *et al.* 2007 - Gerin 2008)

Pour n assez grand,

$$n^4 \log n \leq \max_{\sigma(0)} \mathbb{E}[T_{fix}] \leq (n^2)^{n^2}$$

Minorité sur un arbre fini



Théorème (Regnault-Rouquier-Thierry 2009)

Pour G un arbre à n sommets :

- *Si* $\deg(G) \leq 3$,
$$\mathbb{E}[T_{fix}] = \mathcal{O}(n^4).$$
- *Si G est l'arbre complet de degré* 4,
$$\mathbb{E}[T_{fix}] \geq 1.5^n.$$

Plan

Minorité sur un graphe fini

Minorité sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Une variante : p-Minorité sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$p \in (0, 1)$ fixé.

Définition

La p-minorité est définie de la façon suivante :

- *À l'instant t, chaque site est tiré au sort avec proba $p/1-p$.*
- *Ceux qui sont tirés au sort sont mis dans l'état minoritaire (en regardant $\sigma(t-1)$).*

Une variante : p-Minorité sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

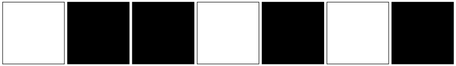
$p \in (0, 1)$ fixé.

Définition

La p-minorité est définie de la façon suivante :

- *À l'instant t, chaque site est tiré au sort avec proba $p/1-p$.*
- *Ceux qui sont tirés au sort sont mis dans l'état* minoritaire *(en regardant $\sigma(t-1)$).*

$t-1$



Une variante : p-Minorité sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

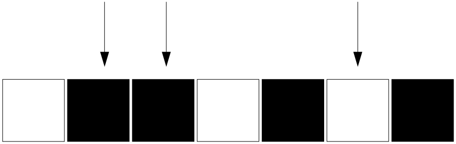
$p \in (0,1)$ fixé.

Définition

La p-minorité est définie de la façon suivante :

- *À l'instant t, chaque site est tiré au sort avec proba $p/1-p$.*
- *Ceux qui sont tirés au sort sont mis dans l'état* minoritaire *(en regardant $\sigma(t-1)$).*

$t-1$



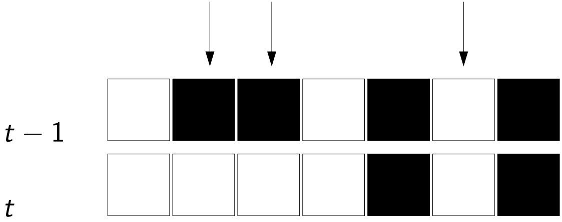
Une variante : p-Minorité sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$p \in (0, 1)$ fixé.

Définition

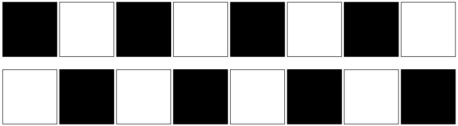
La p-minorité est définie de la façon suivante :

- *À l'instant t, chaque site est tiré au sort avec proba $p/1-p$.*
- *Ceux qui sont tirés au sort sont mis dans l'état minoritaire (en regardant $\sigma(t-1)$).*



Le comportement sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- n pair : on finit par être piégé dans



ou

- n impair : chaîne irréductible sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$.

La p-minorité sur $\mathbb{Z}$

Conjecture (Busic-Mairesse-Marcovici)

Il existe un seuil critique p_c tel que

- *Si $p < p_c$, les mesures stationnaires triviales.*
- *Si $p > p_c$, il existe des mesures stationnaires non-triviales.*

La p-minorité sur $\mathbb{Z}$

Conjecture (Busic-Mairesse-Marcovici)

Il existe un seuil critique p_c tel que

- *Si $p < p_c$, les mesures stationnaires triviales.*
- *Si $p > p_c$, il existe des mesures stationnaires non-triviales.*

Premier pas pour comprendre/nier/prouver la

Conjecture des taux positifs (Gacs,Gray, ... 80's)

Si un système de particules sur $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ est "suffisamment" mélangeant, alors il n'a qu'une seule mesure stationnaire.