

Performances de tests d'hypothèses pour la détection d'émetteurs

P. Bianchi, M. Debbah, M. Maida, J. Najim



UNIVERSITÉ
PARIS-SUD 11

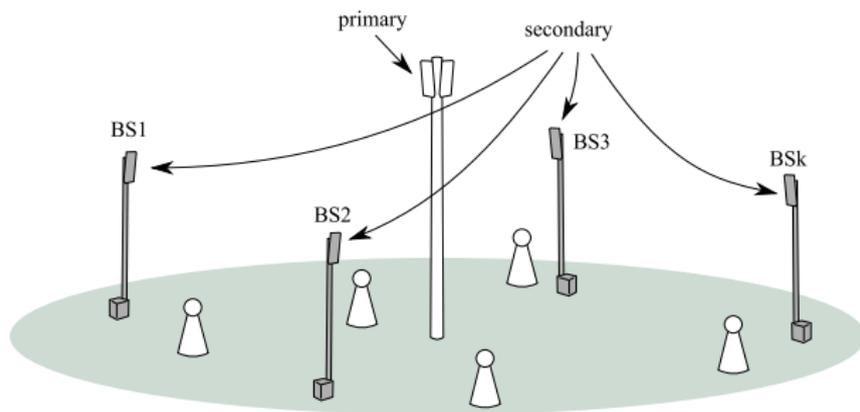


MAS 2010 - Bordeaux

Outline

- 1 Tester la Présence d'une Source
- 2 Étude de Performance
- 3 Comparaison à un test de référence

Contexte : écoute coopérative de spectre



- Un réseau sans fil primaire occupe le spectre en laissant des bandes libres.
- Un système **secondaire** souhaite utiliser ces bandes inoccupées.
- Les utilisateurs secondaires **partagent l'information** pour détecter les bandes libres.

Modèle de signal

K = nombre de capteurs secondaires

N = nombre d'échantillons observés par chaque capteur

- **Hypothèse H0** : Pas de signal. Chaque capteur secondaire k reçoit une série temporelle $y_k(n)$ donné par :

$$y_k(n) = w_k(n)$$

où $w_k(n) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$ est un bruit blanc gaussien.

- **Hypothèse H1** : Présence d'un signal. Les observations s'écrivent :

$$y_k(n) = h_k s(n) + w_k(n)$$

où $s(n)$ est un signal gaussien primaire et où h_k est le **gain du canal** entre l'émetteur primaire et le k ème capteur.

Objectif :

- Proposer des fonctions de test pour détecter **H1** vs. **H0**, et analyser leurs performances en termes d'erreur de **Type I** et de **Type II**.

Difficulté :

- Les paramètres σ, h_1, \dots, h_K sont inconnus. Le test de **Neyman Pearson** ne peut **pas** être implémenté.

Ici, il s'agit de :

- 1 présenter le **test du rapport de vraisemblance généralisé** (GLRT),
- 2 étudier ses erreurs de **Type I et II**,
- 3 comparer au test de **référence** fondé sur le rapport des valeurs propres extrêmes (EER Test)
- 4 établir que le GLRT est uniformément plus puissant que le EERT.

Contexte de l'analyse : K, N ont le même ordre de grandeur

Ici, il s'agit de :

- 1 présenter le **test du rapport de vraisemblance généralisé** (GLRT),
- 2 étudier ses erreurs de **Type I et II**,
- 3 comparer au test de **référence** fondé sur le rapport des valeurs propres extrêmes (EER Test)
- 4 établir que le GLRT est uniformément plus puissant que le EERT.

Contexte de l'analyse : K, N ont le même ordre de grandeur

L'étude de performances est fondée sur l'**analyse asymptotique** des valeurs propres extrêmes de matrices spiked.

Rapport de vraisemblance généralisé (1/2)

Rassemblons toutes les observations $y_k(n)$ dans une matrice $K \times N$ d'observation \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y} = [y_k(n)]_{k=1:K, n=1:N}$$

- Sous \mathbf{H}_0 , les éléments de \mathbf{Y} sont i.i.d. $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$. La vraisemblance s'écrit :

$$p_0(\mathbf{Y}; \sigma^2) = (\pi\sigma^2)^{-NK} \exp\left(-\frac{N}{\sigma^2} \text{Tr } \mathbf{R}\right).$$

où $\mathbf{R} = \frac{1}{N} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^*$ est la matrice de **covariance empirique**.

Rapport de vraisemblance généralisé (1/2)

Rassemblons toutes les observations $y_k(n)$ dans une matrice $K \times N$ d'observation \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y} = [y_k(n)]_{k=1:K, n=1:N}$$

- Sous \mathbf{H}_0 , les éléments de \mathbf{Y} sont i.i.d. $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$. La vraisemblance s'écrit :

$$p_0(\mathbf{Y}; \sigma^2) = (\pi \sigma^2)^{-NK} \exp\left(-\frac{N}{\sigma^2} \text{Tr } \mathbf{R}\right).$$

où $\mathbf{R} = \frac{1}{N} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^*$ est la matrice de **covariance empirique**.

- Sous \mathbf{H}_1 , les colonnes de \mathbf{Y} sont i.i.d. $\mathcal{CN}(0, \mathbf{h} \mathbf{h}^* + \sigma^2 \mathbf{I}_K)$ où $\mathbf{h} = [h_1, \dots, h_K]^T$ représente le canal (SIMO) entre l'émetteur primaire et les K capteurs secondaires. La vraisemblance s'écrit :

$$p_1(\mathbf{Y}; \mathbf{h}, \sigma^2) = (\pi^K \det(\mathbf{h} \mathbf{h}^* + \sigma^2 \mathbf{I}_K))^{-N} \exp\left(-N \text{Tr}(\mathbf{R}(\mathbf{h} \mathbf{h}^* + \sigma^2 \mathbf{I}_K)^{-1})\right).$$

Rapport de vraisemblance généralisé (2/2)

Ici, σ^2, \mathbf{h} sont inconnus. Le GLRT rejette \mathbf{H}_0 pour de fortes valeurs de la statistique :

$$\frac{\sup_{\mathbf{h}, \sigma^2} p_1(\mathbf{Y}; \mathbf{h}, \sigma^2)}{\sup_{\sigma^2} p_0(\mathbf{Y}; \sigma^2)}$$

Rapport de vraisemblance généralisé (2/2)

Ici, σ^2 , \mathbf{h} sont inconnus. Le GLRT rejette \mathbf{H}_0 pour de fortes valeurs de la statistique :

$$\frac{\sup_{\mathbf{h}, \sigma^2} p_1(\mathbf{Y}; \mathbf{h}, \sigma^2)}{\sup_{\sigma^2} p_0(\mathbf{Y}; \sigma^2)}$$

Après quelques calculs classiques et connus, le GLRT revient à :

Rejeter \mathbf{H}_0 lorsque la statistique :

$$T_N := \frac{\lambda_{\max}}{\frac{1}{K} \text{Tr} \mathbf{R}}$$

est **supérieure** à un certain seuil γ

où λ_{\max} est la plus grande valeur propre (vap) de $\mathbf{R} := \frac{1}{N} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^*$.

Outline

- 1 Tester la Présence d'une Source
- 2 Étude de Performance
- 3 Comparaison à un test de référence

Erreurs de Type I et de Type II

Pour un seuil donné γ , on définit :

- La probabilité d'erreur de Type I $P_0[T_N > \gamma]$ comme la proba de décider **H1** lorsque **H0** est vraie,
- La probabilité d'erreur de Type II $P_1[T_N < \gamma]$ comme la proba de décider **H0** lorsque **H1** est vraie.

(N.B. L'erreur de Type II dépend de \mathbf{h} et σ^2)

Courbe ROC (Receiver Operating Characteristic)

- Les erreurs de Type I et II dépendent du seuil γ .
- La courbe ROC (inversée) est l'ensemble des couples (erreur Type I, erreur Type II) pour tous les seuils possibles.

$$\overline{ROC} := \{(P_0[T_N > \gamma], P_1[T_N < \gamma]) : \gamma \in \mathbb{R}_+\} .$$

→ fournit l'erreur de Type II associée à une erreur de Type I fixée.

Courbe ROC (Receiver Operating Characteristic)

- Les erreurs de Type I et II dépendent du seuil γ .
- La courbe ROC (inversée) est l'ensemble des couples (erreur Type I, erreur Type II) pour tous les seuils possibles.

$$\overline{ROC} := \{(P_0[T_N > \gamma], P_1[T_N < \gamma]) : \gamma \in \mathbb{R}_+\} .$$

→ fournit l'erreur de Type II associée à une erreur de Type I fixée.

- Les erreurs de Type I et II n'admettent pas d'expression simple.
 ⇒ On étudie la courbe ROC dans le **régime asymptotique** :

$$K \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty, \frac{K}{N} \rightarrow c \in (0, 1)$$

Interprétation : Grand nombre de capteurs K et fenêtre d'observation N "plutôt courte".

Comportement asymptotique de T_N sous H_0

Rappelons que $\mathbf{R} := \frac{1}{N} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^*$ où \mathbf{Y} a des entrées i.i.d. $\mathcal{CN}(0, \sigma^2)$.

- λ_{\max} converge vers le **bord droit** du support de Marcenko-Pastur

$$\lambda_{\max} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{(\text{sous } H_0)} \sigma^2 (1 + \sqrt{c})^2$$

- Par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{K} \text{Tr} \mathbf{R} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{(\text{sous } H_0)} \sigma^2 .$$

- Par conséquent, $T_N = \frac{\lambda_{\max}}{\frac{1}{K} \text{Tr} \mathbf{R}}$ converge vers

$$\lambda^+ := (1 + \sqrt{c})^2 .$$

Comportement asymptotique de T_N sous **H1** (1/2)

Définissons le Rapport Signal-sur-Bruit (RSB) par $\rho := \frac{\|\mathbf{h}\|^2}{\sigma^2}$.

Hypothèse : $\rho > \sqrt{c}$.

Sous **H1**, les colonnes de \mathbf{Y} sont iid $\mathcal{CN}(0, \mathbf{h}\mathbf{h}^* + \sigma^2\mathbf{I}_K)$:

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{h}\mathbf{h}^* + \sigma^2\mathbf{I}_K)^{1/2} \mathbf{X}_{K \times N} \quad \text{où } X_{i,j} \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{CN}(0,1)$$

$$= \mathbf{U} \begin{bmatrix} \sigma\sqrt{1+\rho} & & & \\ & \sigma & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma \end{bmatrix} \mathbf{U}^* \mathbf{X} \quad , \text{ où } \mathbf{U}_{K \times K} \text{ unitaire}$$

\Rightarrow Le spectre de $\mathbf{R} = \frac{1}{N} \mathbf{Y}\mathbf{Y}^*$ est régi par un modèle spiked.

Comportement asymptotique de T_N sous **H1** (2/2)

- Si $\rho > \sqrt{c}$, λ_{\max} converge **hors** du bulk de MP [Baik-Silv-06]

$$\lambda_{\max} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{(\text{sous } H1)} \sigma^2 (1 + \rho) \left(1 + \frac{c}{\rho} \right) .$$

- La convergence de la trace reste inchangée :

$$\frac{1}{K} \text{Tr} \mathbf{R} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{(\text{sous } H1)} \sigma^2 .$$

- Par conséquent, $T_N = \frac{\lambda_{\max}}{\frac{1}{K} \text{Tr} \mathbf{R}}$ converge vers :

$$\lambda_{\text{spk}} := (1 + \rho) \left(1 + \frac{c}{\rho} \right) .$$

Retour à l'analyse de la courbe ROC

Comme $T_N \xrightarrow{\mathbf{H0}} \lambda^+$, $P_0[T_N > \gamma]$ est un **événement rare** quand $\gamma > \lambda^+$.

Comme $T_N \xrightarrow{\mathbf{H1}} \lambda_{\text{spk}}$, $P_1[T_N < \gamma]$ est un **événement rare** quand $\gamma < \lambda_{\text{spk}}$.

Retour à l'analyse de la courbe ROC

Comme $T_N \xrightarrow{\mathbf{H0}} \lambda^+$, $P_0[T_N > \gamma]$ est un **événement rare** quand $\gamma > \lambda^+$.

Comme $T_N \xrightarrow{\mathbf{H1}} \lambda_{\text{spk}}$, $P_1[T_N < \gamma]$ est un **événement rare** quand $\gamma < \lambda_{\text{spk}}$.

Notre travail a été de montrer que :

$$\begin{aligned} P_0[T_N > \gamma] &\simeq e^{-N \mathcal{E}_0(\gamma)} \\ P_1[T_N < \gamma] &\simeq e^{-N \mathcal{E}_1(\gamma)} . \end{aligned}$$

L'ensemble des couples $(\mathcal{E}_0(\gamma), \mathcal{E}_1(\gamma))$ forme la **courbe des exposants d'erreur**

Elle peut être interprétée comme une courbe ROC asymptotique.

Résultat principal

Sous l'hypothèse **H0** (resp. **H1**), T_N satisfait un principe de grandes déviations à l'échelle N de fonction de taux \mathcal{E}_0 (resp. \mathcal{E}_1) donnée par ¹

$$\mathcal{E}_0(\gamma) = \gamma - \lambda^+ - (1 - c) \log \left(\frac{\gamma}{\lambda^+} \right) - 2c (F(\gamma) - F(\lambda^+))$$

$$\mathcal{E}_1(\gamma) = \frac{\gamma - \lambda_{\text{spk}}}{(1 + \rho)} - (1 - c) \log \left(\frac{\gamma}{\lambda_{\text{spk}}} \right) - c (F(\gamma) - F(\lambda_{\text{spk}}))$$

En particulier, on prouve :

$$\frac{1}{N} \log P_0[T_N > \gamma] \rightarrow -\mathcal{E}_0(\gamma)$$

$$\frac{1}{N} \log P_1[T_N < \gamma] \rightarrow -\mathcal{E}_1(\gamma) .$$

1. pour tout $\gamma > \lambda^+$, où $F(x) = \log(x) + \frac{1}{c} \log(1 + cf(x)) + \log(1 + \tilde{f}(x)) + xf(x)\tilde{f}(x)$, où $f(x)$ est la transformée de Stieltjes de la loi de MP et $\tilde{f}(x) = -x^{-1}(1 + cf(x))^{-1}$.

Outline

- 1 Tester la Présence d'une Source
- 2 Étude de Performance
- 3 Comparaison à un test de référence

Extreme Eigenvalues Ratio (EER) Test

Dans le contexte de l'écoute coopérative de spectre, la statistique $U_N = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ a fait l'objet d'une attention particulière.

EERT \Rightarrow Rejeter \mathbf{H}_0 quand U_N est supérieure à un seuil.

Nous évaluons la courbe des exposants d'erreur de U_N et comparons à T_N .

Résultat

- Résultat** : La courbe des exposants d'erreur pour U_N est donnée par $\{(\Gamma_0(t), \Gamma_1(t)) : t \in (\frac{\lambda^+}{(1-\sqrt{c})^2}, \frac{\lambda_{\text{spk}}}{(1-\sqrt{c})^2})\}$ où

$$\Gamma_0(t) = \inf \left\{ \mathcal{E}_0(x) + \mathcal{E}^-(y) : \frac{x}{y} = t \right\}$$

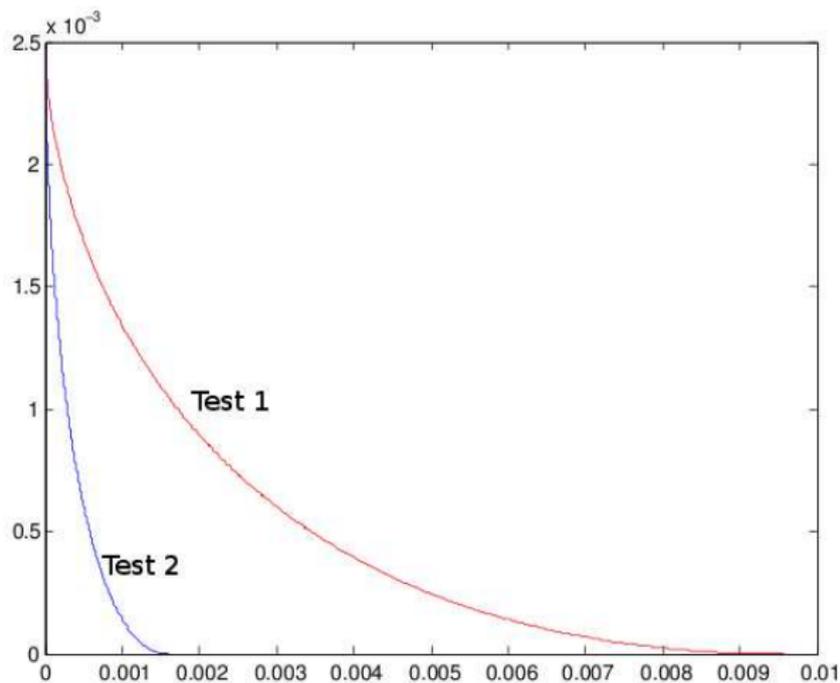
$$\Gamma_1(t) = \inf \left\{ \mathcal{E}_1(x) + \mathcal{E}^-(y) : \frac{x}{y} = t \right\}$$

avec $\mathcal{E}^-(y) = y - (1 - \sqrt{c})^2 - (1 - c) \log \frac{y}{(1 - \sqrt{c})^2} - 2c(F^-(y) - F^-((1 - \sqrt{c})^2))$
 $\forall y \in (0, (1 - \sqrt{c})^2)$.

- On prouve en outre que** : quels que soient σ, h , la courbe des exposants d'erreur de T_N domine uniformément celle de U_N .

Autrement dit, le test T_N est uniformément plus puissant que le test U_N pour N suffisamment grand.

Illustration



Courbe d'exposants d'erreur associée à T_N (Test 1) et à U_N (Test 2).

Conclusion

- Nous avons étudié le problème de la détection de bandes libres en environnement bruité.
- Nous avons évalué la courbe des exposants d'erreur associée au GLRT. Notre analyse repose sur l'obtention d'un PGD gouvernant la plus grande vap de matrices aléatoires qui suivent un modèle "spiked".
- Nous avons prouvé que le GLRT est uniformément plus puissant le EERT souvent utilisé dans le contexte de la radio cognitive.

Référence

Performance of Statistical Tests for Single Source Detection using Random Matrix Theory, Bianchi, Debbah, Maida, Najim, IEEE Transactions on Information Theory, à paraître.