

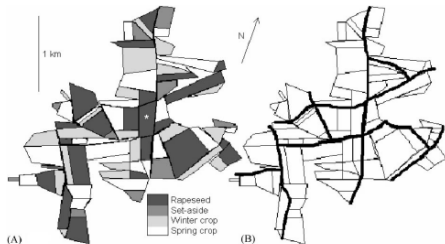
Un modèle gibbsien de tessellation pour la simulation de paysages

Kiên Kiêu¹, Katarzyna Adamczyk¹, Hervé Monod¹

¹UR 341, INRA, Jouy-en-Josas, France

3 septembre 2010

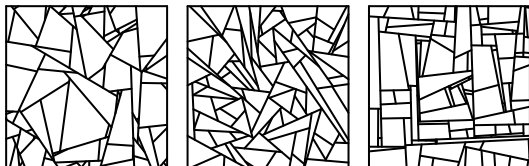
N. Colbach et al. / Agriculture, Ecosystems and Environment 83 (2001) 255–270



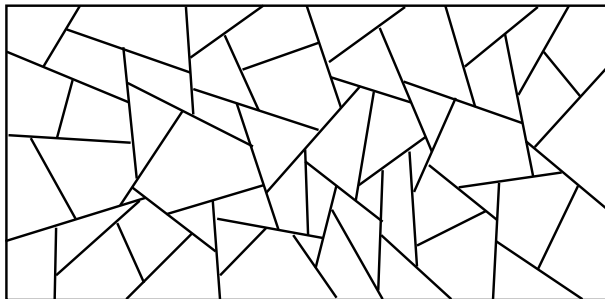
Un modèle de Gibbs pour des tessellations en T

$$dP(T) \propto e^{-E_{\theta}(T)} d\gamma(T)$$

$E_{\theta}(T) = \langle \theta, u(T) \rangle$, $u(T)$ vecteur de statistiques de T

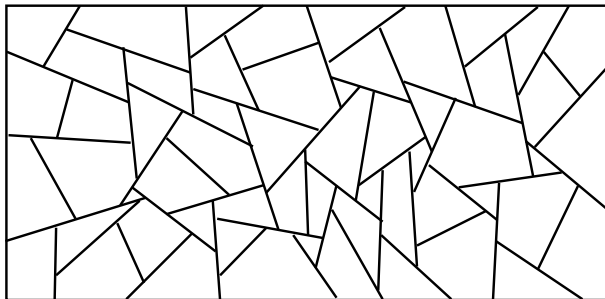


Divisions, fusions et flips



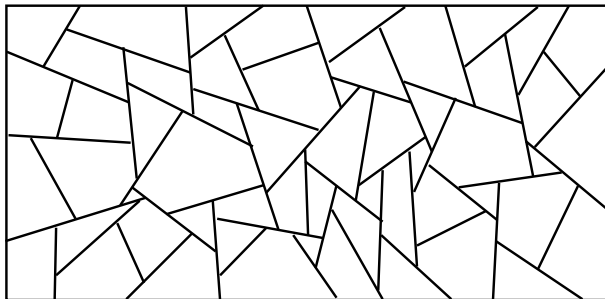
- ▶ Opérations locales et réversibles.
- ▶ Passage d'une tessellation à l'autre par une suite d'opérations.

Divisions, fusions et flips



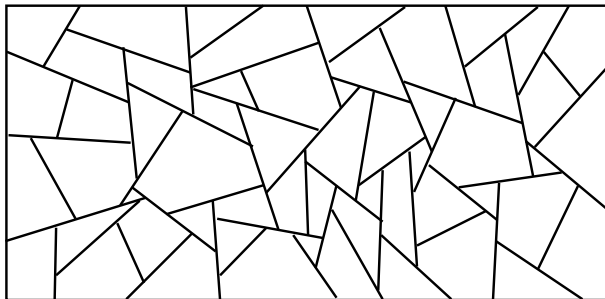
- ▶ Opérations locales et réversibles.
- ▶ Passage d'une tessellation à l'autre par une suite d'opérations.

Divisions, fusions et flips



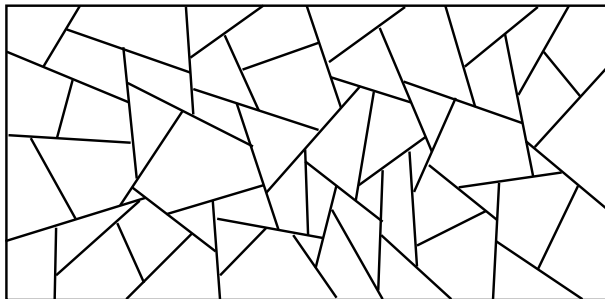
- ▶ Opérations locales et réversibles.
- ▶ Passage d'une tessellation à l'autre par une suite d'opérations.

Divisions, fusions et flips



- ▶ Opérations locales et réversibles.
- ▶ Passage d'une tessellation à l'autre par une suite d'opérations.

Divisions, fusions et flips



- ▶ Opérations locales et réversibles.
- ▶ Passage d'une tessellation à l'autre par une suite d'opérations.

Simulation par Metropolis-Hastings-Green

Tessellation en T courante : T_n .

1. Choisir un type de modification t parmi $\{s, m, f\}$ avec des probabilités égales.
2. Si pas de modification du type t applicable à T_n , $T_{n+1} = T_n$.
3. Choisir une modification U de type t suivant la loi $q_t(T_n, \cdot)$.
4. Calculer le rapport de Hasting $r_t(T_n, U)$.
5. Accepter la modification $T_{n+1} = UT_n$ avec la probabilité

$$\min\{1, r_t(T_n, U)\}.$$

Rapport de Hastings pour une fusion M appliquée à T :

$$r_m(T, M) = \frac{\pi}{2} e^{E_\theta(T) - E_\theta(MT)} \frac{n_{s, nb}(T)}{I(T) + I(\partial D) - I(M)} e^{\log 2 + I(M)/\pi}.$$

Convergence en variation totale

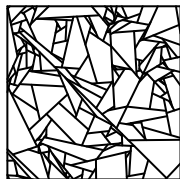
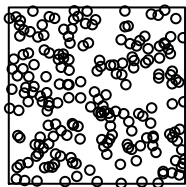
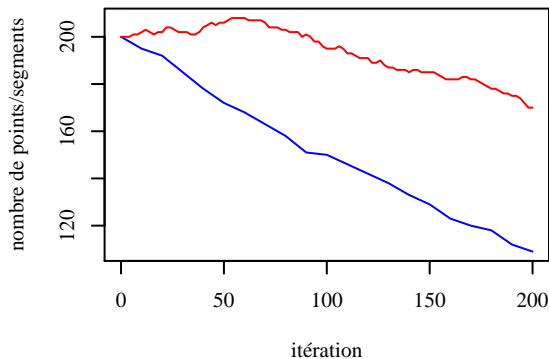
- ▶ Réversibilité de la chaîne de Markov \mathbf{T}_n .
- ▶ Irréductibilité de \mathbf{T}_n .
- ▶ Apériodicité de \mathbf{T}_n .

Proposition

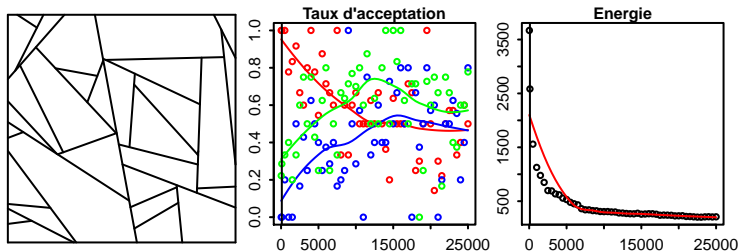
Si l'énergie E_θ est bornée, alors pour P -presque toute tessellation T , la loi conditionnelle de \mathbf{T}_n sachant $\mathbf{T}_0 = T$, notée $P_n(T, \cdot)$ converge vers P en variation totale.

Ergodicité géométrique ?

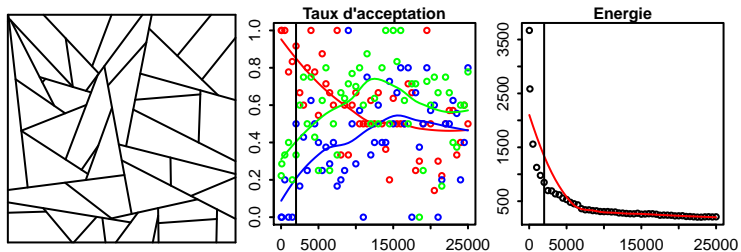
- ▶ Ergodicité géométrique : vitesse de la convergence de $P_n(T, \cdot)$ vers P en variation totale.
- ▶ Ergodicité géométrique \Rightarrow théorème central limite.
- ▶ Ergodicité géométrique \Leftarrow condition de dérive géométrique.



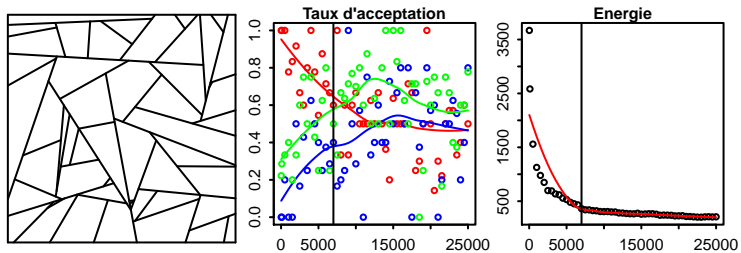
Exemple de simulation



Exemple de simulation



Exemple de simulation



Auto-corrélation de la chaîne de Markov

