

Modélisation de pannes sur un réseau électrique.

Construction de loi a priori par arbres aléatoires

S. Donnet ¹ and J. Rousseau^{1,2}

¹Céramade, Université Paris-Dauphine, ²CREST, ENSAE

02 Septembre 2010

Première partie :

Contexte et Première modélisation

Réseau électrique

- On considère un réseau électrique assimilé à un câble de longueur d et des accessoires



- On s'intéresse aux pannes sur le réseau.

Observations. Notations

- **Observations** : T_1, \dots, T_n instants de pannes sur une période fixée Δ_T
- Z_i : origine de la i -ème panne : **mal ou non observée**
 - $Z_i = 1$ si la panne a lieu sur un accessoire
 - $Z_i = 2$ si la panne a lieu sur le câble
- N_0 : nombre d'accessoires au début de l'étude : **inconnu**
- N_i : nombre d'accessoires au moment de la i -ème panne (i -ème panne incluse)

$$N_i = N_0 + \sum_{j=1}^i Z_j$$

- **Notations** : $Z_{1:i} = (Z_1, \dots, Z_i)$ et $T_{1:i} = (T_1, \dots, T_i)$,
 $Z_{\setminus i} = (Z_1, \dots, Z_{i-1}, Z_{i+1}, \dots, Z_n)$

Modélisation des instants de pannes

- Pannes : juxtaposition des deux types de pannes
- Le temps entre deux **pannes sur le câble** suit une loi exponentielle de paramètre proportionnel à la longueur du câble : $\lambda_c d$
- Le temps entre deux **pannes sur les accessoires** suit une loi exponentielle de paramètre proportionnel au nombre d'accessoires présents sur le segment : $\lambda_a N_i$
- **Conséquence** : le temps entre deux instants de panne suit :

$$\begin{aligned} T_{i+1} - T_i &\sim \min(\mathcal{E}(\lambda_c d), \mathcal{E}(\lambda_a N_i)) \\ &\sim \mathcal{E}(\lambda_c d + \lambda_a N_i) \end{aligned} \quad (1)$$

avec $T_0 = 0$

Modèle bayésien

Modèle hiérarchique :

$$\begin{aligned}
 T_{i+1} - T_i &\sim \mathcal{E}(\lambda_c d + \lambda_a N_i) \\
 N_i &= N_0 + \sum_{j=1}^i Z_j \\
 P(Z_i = 1 | N_0, \lambda_a, \lambda_c, Z_{1:i-1}) &= \frac{\lambda_a N_{i-1}}{\lambda_a N_{i-1} + d \lambda_c} \\
 P(Z_i = 2 | N_0, \lambda_a, \lambda_c, Z_{1:i-1}) &= \frac{\lambda_c d}{\lambda_a N_{i-1} + d \lambda_c} \\
 \lambda_a &\sim \Gamma(\alpha_a, \beta_a) \\
 \lambda_c &\sim \Gamma(\alpha_c, \beta_c)
 \end{aligned}$$

Objectif : loi a posteriori de $\theta = (\lambda_a, \lambda_c) \Rightarrow$ algorithme de Gibbs

Vraisemblance complète

$$\begin{aligned}
 \ell(T_{1:n}, Z_{1:n}|\theta) &= \prod_{i=1}^n \ell(T_i|T_{i-1}, Z_{1:i-1}, \theta) \ell(Z_i|Z_{1:i-1}, \theta) \\
 &= \prod_{i=1}^n (\lambda_c d + \lambda_a N_{i-1}) \exp[-(\lambda_c d + \lambda_a N_{i-1})(T_i - T_{i-1})] \\
 &\quad \left(\frac{\lambda_a N_{i-1}}{\lambda_a N_{i-1} + d \lambda_c} \right)^{\mathbb{I}_{Z_i=1}} \left(\frac{\lambda_c d}{\lambda_a N_{i-1} + d \lambda_c} \right)^{\mathbb{I}_{Z_i=2}} \\
 &= \exp[-\lambda_c d T_n] (\lambda_c d)^{S_2(Z_{1:n})} \exp[-\lambda_a S_n] (\lambda_a)^{S_1(Z_{1:n})} \prod_{i=1}^n N_{i-1}^{\mathbb{I}_{Z_i=1}}
 \end{aligned}$$

avec

$$S_1(Z_{1:n}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{Z_i=1}, \quad S_2(Z_{1:n}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{Z_i=2}, \quad S_n = \sum_{i=1}^n N_{i-1}(T_i - T_{i-1})$$

Algorithme de Gibbs

A l'itération k

1. $\lambda_a^{(k)} \sim \pi(\cdot | T_{1:n}, \lambda_c^{(k-1)}, Z_{1:n}^{(k-1)}, N_0)$
2. $\lambda_c^{(k)} \sim \pi(\cdot | T_{1:n}, \lambda_a^{(k)}, Z_{1:n}^{(k-1)}, N_0)$
3. Pour $i = 1 \dots n$, $Z_i^{(k)} \sim \pi(\cdot | T_{1:n}, \lambda_a^{(k)}, \lambda_c^{(k)}, Z_{1:i-1}^{(k)}, Z_{i+1:n}^{(k-1)}, N_0)$

Algorithme de Gibbs

A l'itération k

$$1. \lambda_a^{(k)} \sim \pi(\cdot | T_{1:n}, \lambda_c^{(k-1)}, Z_{1:n}^{(k-1)}, N_0)$$

$$\begin{aligned} \pi(\lambda_a | T_{1:n}, \lambda_c^{(k-1)}, Z_{1:n}^{(k-1)}, N_0) &\propto \ell(T_{1:n}, Z_{1:n}^{(k-1)} | \theta) \pi(\lambda_a) \\ &\propto e^{-\lambda_a S_n} \lambda_a^{S_1(Z_{1:n}^{(k-1)})} \\ &\quad (\lambda_a)^{\alpha_a - 1} e^{-\beta_a \lambda_a} \end{aligned}$$

$$2. \lambda_c^{(k)} \sim \pi(\cdot | T_{1:n}, \lambda_a^{(k)}, Z_{1:n}^{(k-1)}, N_0)$$

$$3. \text{ Pour } i = 1 \dots n, Z_i^{(k)} \sim \pi(\cdot | T_{1:n}, \lambda_a^{(k)}, \lambda_c^{(k)}, Z_{1:i-1}^{(k)}, Z_{i+1:n}^{(k-1)}, N_0)$$

Algorithme de Gibbs

A l'itération k

$$1. \lambda_a^{(k)} \sim \pi(\cdot | T_{1:n}, \lambda_c^{(k-1)}, Z_{1:n}^{(k-1)}, N_0)$$

$$\lambda_a^{(k)} \sim \Gamma(\alpha_a + S_1(Z_{1:n}^{(k-1)}), \beta_a + \sum_{i=1}^n N_{i-1}^{(k-1)}(T_i - T_{i-1}))$$

$$2. \lambda_c^{(k)} \sim \pi(\cdot | T_{1:n}, \lambda_a^{(k)}, Z_{1:n}^{(k-1)}, N_0)$$

$$3. \text{ Pour } i = 1 \dots n, Z_i^{(k)} \sim \pi(\cdot | T_{1:n}, \lambda_a^{(k)}, \lambda_c^{(k)}, Z_{1:i-1}^{(k)}, Z_{i+1:n}^{(k-1)}, N_0)$$

Algorithme de Gibbs

A l'itération k

$$1. \lambda_a^{(k)} \sim \pi(\cdot | T_{1:n}, \lambda_c^{(k-1)}, Z_{1:n}^{(k-1)}, N_0)$$

$$\lambda_a^{(k)} \sim \Gamma(\alpha_a + S_1(Z_{1:n}^{(k-1)}), \beta_a + \sum_{i=1}^n N_{i-1}^{(k-1)}(T_i - T_{i-1}))$$

$$2. \lambda_c^{(k)} \sim \pi(\cdot | T_{1:n}, \lambda_a^{(k)}, Z_{1:n}^{(k-1)}, N_0)$$

$$\begin{aligned} \pi(\lambda_c | T_{1:n}, \lambda_a^{(k)}, Z_{1:n}^{(k-1)}, N_0) &\propto \ell(T_{1:n}, Z_{1:n}^{(k-1)} | \theta) \pi(\lambda_c) \\ &\propto e^{-\lambda_c d T_n} \lambda_c^{S_2(Z_{1:n}^{(k-1)})} \\ &\quad (\lambda_c)^{\alpha_c - 1} e^{-\beta_c \lambda_c} \end{aligned}$$

$$3. \text{ Pour } i = 1 \dots n, Z_i^{(k)} \sim \pi(\cdot | T_{1:n}, \lambda_a^{(k)}, \lambda_c^{(k)}, Z_{1:i-1}^{(k)}, Z_{i+1:n}^{(k-1)}, N_0)$$

Algorithme de Gibbs

A l'itération k

$$1. \lambda_a^{(k)} \sim \pi(\cdot | T_{1:n}, \lambda_c^{(k-1)}, Z_{1:n}^{(k-1)}, N_0)$$

$$\lambda_a^{(k)} \sim \Gamma(\alpha_a + S_1(Z_{1:n}^{(k-1)}), \beta_a + \sum_{i=1}^n N_{i-1}^{(k-1)}(T_i - T_{i-1}))$$

$$2. \lambda_c^{(k)} \sim \pi(\cdot | T_{1:n}, \lambda_a^{(k)}, Z_{1:n}^{(k-1)}, N_0)$$

$$\lambda_c^{(k)} \sim \Gamma(\alpha_c + S_2(Z_{1:n}^{(k-1)}), \beta_c + dT_n)$$

$$3. \text{ Pour } i = 1 \dots n, Z_i^{(k)} \sim \pi(\cdot | T_{1:n}, \lambda_a^{(k)}, \lambda_c^{(k)}, Z_{1:i-1}^{(k)}, Z_{i+1:n}^{(k-1)}, N_0)$$

Algorithme de Gibbs

A l'itération k

$$1. \lambda_a^{(k)} \sim \pi(\cdot | T_{1:n}, \lambda_c^{(k-1)}, Z_{1:n}^{(k-1)}, N_0)$$

$$\lambda_a^{(k)} \sim \Gamma(\alpha_a + S_1(Z_{1:n}^{(k-1)}), \beta_a + \sum_{i=1}^n N_{i-1}^{(k-1)}(T_i - T_{i-1}))$$

$$2. \lambda_c^{(k)} \sim \pi(\cdot | T_{1:n}, \lambda_a^{(k)}, Z_{1:n}^{(k-1)}, N_0)$$

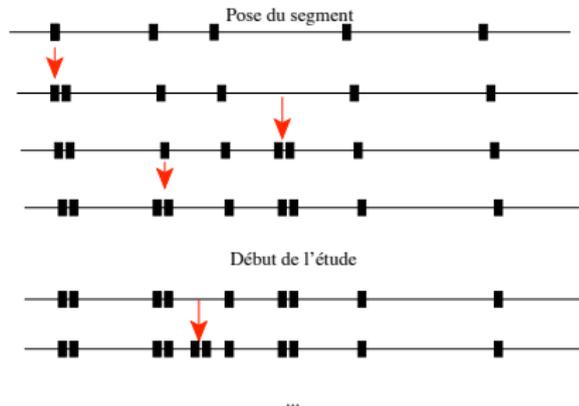
$$\lambda_c^{(k)} \sim \Gamma(\alpha_c + S_2(Z_{1:n}^{(k-1)}), \beta_c + dT_n)$$

$$3. \text{ Pour } i = 1 \dots n, Z_i^{(k)} \sim \pi(\cdot | T_{1:n}, \lambda_a^{(k)}, \lambda_c^{(k)}, Z_{1:i-1}^{(k)}, Z_{i+1:n}^{(k-1)}, N_0)$$

- On évalue $\ell(T_{1:n}, Z_{1:n} | \theta)$ pour $Z_i^{(k)} = 1$ et $Z_i^{(k)} = 2$
- On tire au hasard $Z_i^{(k)} = 1$ ou 2 avec les probabilités renormalisées

A propos de N_0

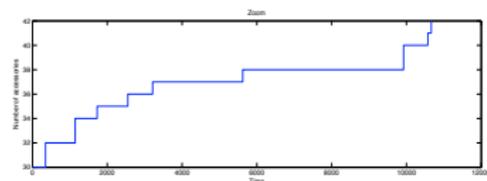
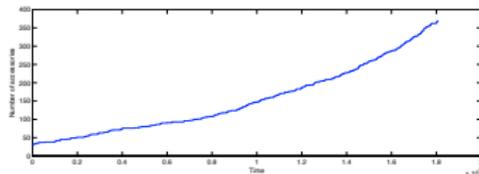
- En pratique : l'état au début de l'étude N_0 est inconnu mais l'état à la pose du segment $N_{-\infty}$ est connu



- Solution utilisée en pratique : N_0 fixé à $N_{-\infty} \Rightarrow$ sous-évalué

Illustration numérique

- Simulation de 100 jeux de données avec $\lambda_a = 9.10^{-6}$, $\lambda_c = 2.10^{-7}$, $d = 1000$, $N_0 = 30$, $n = 300$ instants de pannes.



- Implémentation de l'algorithme de Gibbs avec le vrai N_0 et un N_0 sous estimé ($/4$). 20000 itérations.

Illustration numérique : convergence de l'algorithme

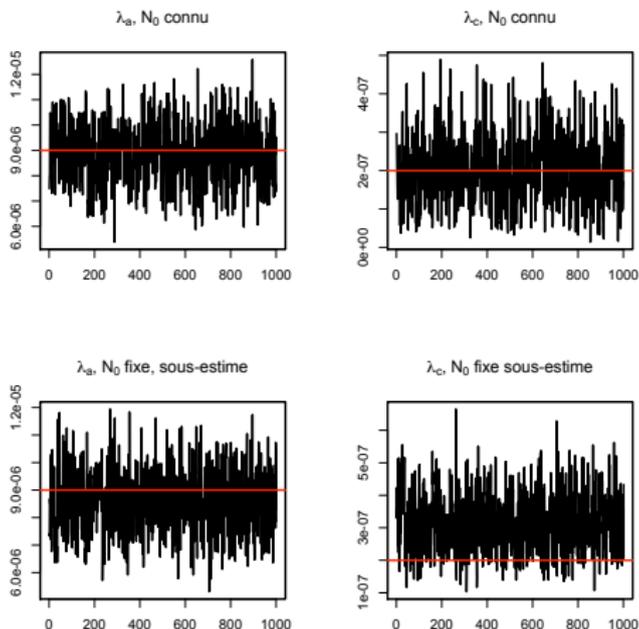


Fig.: Trajectoire des itérations de λ_a et λ_c avec N_0 connu et N_0 sous-estimé

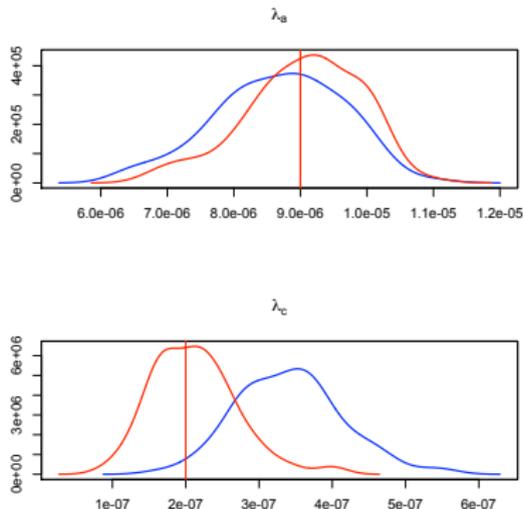
Illustration numérique : influence de N_0 

Fig.: Densité des estimateurs $\widehat{\lambda}_a^{(k)} = E[\lambda_a | T_{1:n}^{(k)}]$ et $\widehat{\lambda}_c^{(k)} = E[\lambda_c | T_{1:n}^{(k)}]$ obtenus sur 100 jeux de données avec 20000 itérations. En rouge, N_0 supposé connu. En bleu, N_0 inconnu fixé à la vraie valeur /4

Illustration numérique : conclusion

- Influence de N_0 sur l'estimation de λ_a et λ_c : non négligeable.
- **Solution naive** : mettre une loi a priori uniforme sur N_0 : première étude faite par J-M Marin montre de mauvais résultats (nécessité d'avoir des lois a priori très très informatives)
- **Objectif** : construire une loi a priori sur N_0 mieux adaptée au problème

Deuxième partie :

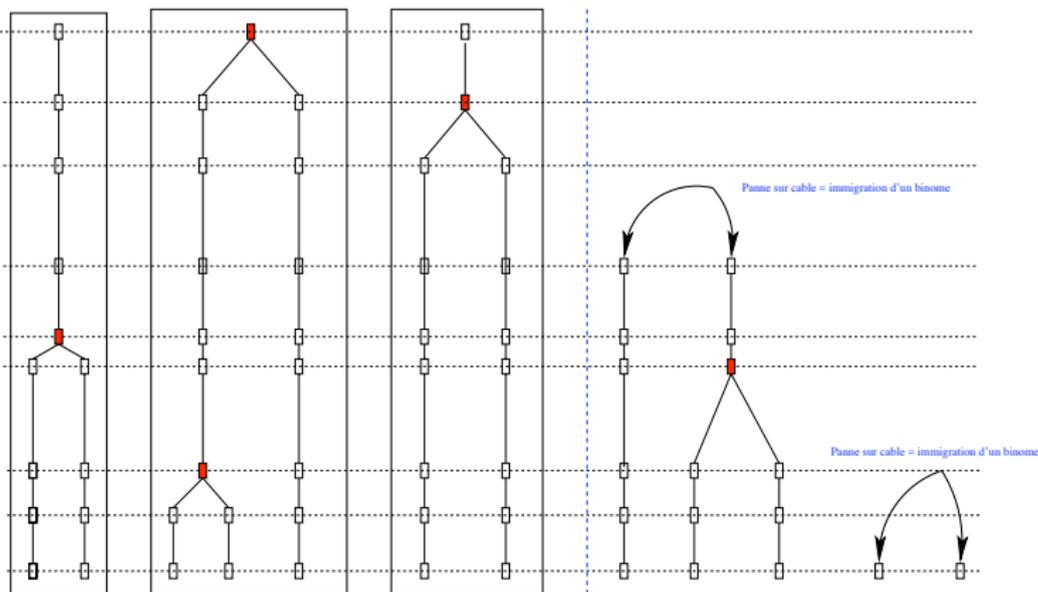
Construction d'une loi a priori sur N_0
Utilisation d'arbres aléatoires

Le processus de pannes vu comme un processus de branchement avec immigration

[en collaboration avec B. Haas (Cérémade)]

- N_0 issu d'une succession de pannes/réparations ayant eu lieu entre la pose du segment et le début de l'étude (25 ans?) $\Rightarrow N_0$ est le nombre asymptotique d'accessoires
- $N_{-\infty}$: nombre d'accessoires à la pose du segment
- N_t : nombre d'accessoires à l'instant $t > 0$

Schéma



- Panne sur un accessoire = remplacement d'un accessoire par 2 = "division cellulaire"
- Panne sur le câble = ajout de deux accessoires = "immigration"

Question

Quelle est la loi limite d'un processus de division avec immigration ayant pour nombre initial $N_{-\infty}$?

Comportement asymptotique du nombre d'accessoires :

Etape 1

Les $N_{-\infty}$ accessoires présents à la pose donnent chacun naissance à un processus de Yule (division en 2) de paramètre λ_a . Ces processus sont indépendants.

Comportement asymptotique d'un processus de Yule

- Soit X_t le nombre de particules/cellules dans un processus de Yule tel que $X_0 = 1$ de paramètre λ_a . Alors $e^{-\lambda_a t} X_t$ converge en loi vers une $\Gamma(1, 1)$.
- Soit X_t le nombre de particules dans un processus de Yule tel que $X_0 = N_{-\infty}$ de paramètre λ_a . Alors $e^{-\lambda_a t} X_t$ converge en loi vers une $\Gamma(N_{-\infty}, 1)$.

Etape 1 : Idée du preuve

On note X_t le nombre de particules dans un processus de Yule tel que $X_0 = 1$. Fonction génératrice $\phi(s, t) = E[s^{X_t}]$

- On note

$$Q_{i,j}(h) = P(X_{t+h} = j | X_t = i) \quad Q_n(t) = P(X_{t+h} = n | X_t = 1)$$

- On a alors $Q'_n(t) = -\lambda_a Q_n(t) + \lambda_a Q_{2,n}(t)$ et

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(s, t) = -\lambda_a \phi(s, t) + \lambda_a \sum_{n=1}^{\infty} s^n Q_{2,n}(t)$$

- Or $\forall i \geq 1 : \sum_{n=1}^{\infty} s^n Q_{i,n}(t) = [\sum_{n=1}^{\infty} s^n Q_n(t)]^i = \phi(s, t)^i$
- D'où

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(s, t) = \lambda_a \phi(s, t) (\phi(s, t) - 1) \quad \text{with} \quad \phi(s, 0) = 1$$

- Soit

$$\phi(s, t) = [1 - e^{\lambda_a t} (1 - s^{-1})]^{-1}$$

Etape 1 : Preuve (suite)

- On en déduit la loi limite de $e^{-\lambda a t} X_t$ si on part d'une seule particule
- On considère la fonction génératrice des moments par exemple

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} E[e^{\theta e^{-\lambda a t} X_t}] &= \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(e^{\theta e^{-\lambda a t}}, t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[1 - e^{\lambda a t} (1 - e^{-\theta e^{-\lambda a t}}) \right]^{-1} \\
 &= \frac{1}{1 - \theta}
 \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction génératrice des moments d'une loi Γ de paramètre $(1, 1)$

- Si on part de $N_{-\infty}$ particules (accessoires), la loi limite est

$$\sum_{j=1}^{N_{-\infty}} \Gamma(1, 1) = \Gamma(N_{-\infty}, 1)$$

Comportement asymptotique du nombre d'accessoires :

Etape 2, avec immigration

Proposition

Soit N_t un processus de Yule de paramètre λ_a avec immigration (de taux $\lambda_c d$) avec pour valeur initiale 0.

$e^{-\lambda_a t} N_t$ converge en loi quand t tend vers l'infini vers

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k Y_k$$

avec

$$Y_k \sim_{i.i.d.} \Gamma(k + \rho, 1), \quad p_k = e^{-\rho} \frac{\rho^k}{k!} \quad \rho = \frac{\lambda_c d}{\lambda_a}$$

(mélange infini de loi Γ avec pondération du type "Poisson")

Convergence [*On age-dependent branching processes with immigration*, Ron Shonkwiler, [Comp. & Maths. with](#)

[Applis](#), 6, 289–296,(1980)]

Preuve repose sur la décomposition des probabilités.

- $P_n(t)$ probabilité qu'il y ait n particules à l'instant t .
- $\nu_k(t)$ probabilité qu'il y ait eu k binômes de migrants dans l'intervalle $[0, t)$.
- $P_{n|k}(t)$ probabilité d'avoir n particules à l'instant t sachant que k binômes de migrants sont arrivés dans l'intervalle $[0, t)$.
- $U_m(t)$ probabilité qu'un binôme de migrants donne naissance (par branchement) à m particules à l'instant t sachant que le binôme a immigré durant l'intervalle $[0, t)$.

Alors

$$P_n(t) = P_{n|0}(t)\nu_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} P_{n|k}(t)\nu_k(t)$$

$$P_{n|k}(t) = \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} U_{i_1}(t) \dots U_{i_k}(t)$$

Convergence (suite)

- On en déduit

$$\begin{aligned}
 \psi(s, t) &= E[s^{N_t}] \\
 &= \nu_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} s^n \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k(t) \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} U_{i_1}(t) \dots U_{i_k}(t) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k(t) \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} s^n U_n(t) \right)^k}_{J(s, t)^k} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_c dt} \frac{(\lambda_c dt)^k}{k!} J(s, t)^k \\
 &= e^{-\lambda_c dt} e^{\lambda_c dt J(s, t)}
 \end{aligned}$$

- On montre que $J(s, t) = \int_0^t (\phi(s, t - \tau))^2 \frac{d\tau}{t}$
- On en déduit l'expression de $\psi(s, t)$ et le comportement asymptotique de $e^{-\lambda_a t} N_t$

Loi asymptotique du nombre d'accessoires

Proposition

Soit N_t un processus de Yule de paramètre λ_a avec immigration (de taux $\lambda_c d$) avec pour valeur initiale $N_{-\infty}$.

$e^{-\lambda_a t} N_t$ converge en loi quand t tend vers l'infini vers

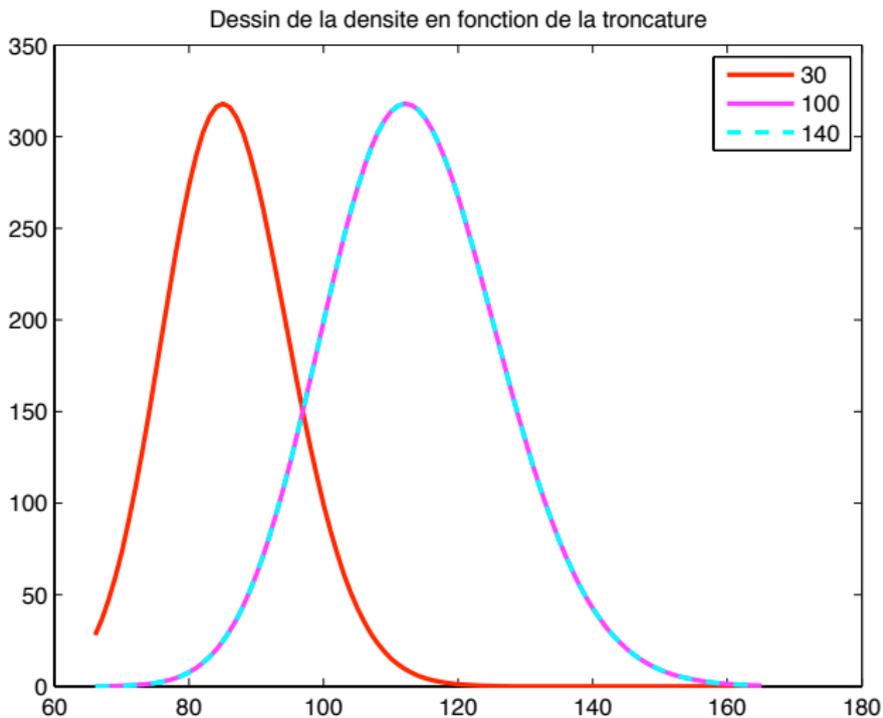
$$\Gamma(N_{-\infty}, 1) + \sum_{k=0}^{\infty} p_k Y_k$$

avec

$$Y_k \sim_{i.i.d.} \Gamma(k + \rho, 1), \quad p_k = e^{-\rho} \frac{\rho^k}{k!} \quad \rho = \frac{\lambda_c d}{\lambda_a}$$

(mélange infini de loi Γ avec pondération du type "Poisson")

Troncature



Modèle bayésien

On note $\Delta_{-\infty}$ le temps passé entre la pose du réseau et le début de l'étude

$$\begin{aligned}
 T_{i+1} - T_i | \lambda_a, \lambda_c, Z_{1:n}, N_0 &\sim \mathcal{E}(\lambda_c d + \lambda_a N_i) \\
 N_i &= N_0 + \sum_{j=1}^i Z_j \\
 P(Z_i = 1 | N_0, \lambda_a, \lambda_c, Z_{1:i-1}) &= \frac{\lambda_a N_{i-1}}{\lambda_a N_{i-1} + d \lambda_c} \\
 P(Z_i = 2 | N_0, \lambda_a, \lambda_c, Z_{1:i-1}) &= \frac{\lambda_c d}{\lambda_a N_{i-1} + d \lambda_c} \\
 N_0 | \lambda_c, \lambda_a &\sim e^{\lambda_a \Delta_{-\infty}} \Gamma(N_{-\infty}, 1) \\
 &\quad + e^{\lambda_a \Delta_{-\infty}} \sum_{k=1}^{\infty} p_k \Gamma\left(k + \frac{\lambda_c d}{\lambda_a}, 1\right) \\
 \lambda_a &\sim \Gamma(\alpha_a, \beta_a) \\
 \lambda_c &\sim \Gamma(\alpha_c, \beta_c)
 \end{aligned}$$

Estimation. Algorithme de Gibbs

Conséquences : les lois de λ_a et λ_c ne sont plus explicites \Rightarrow utilisation de marches aléatoires pour l'estimation (Metropolis-Hastings)

A l'itération k

- $\log \lambda_a^c = \log \lambda_a^{(k-1)} + \eta_1$.
 - Candidat accepté avec probabilité telle que $\pi(\lambda_a | N_0^{(k-1)}, Z_{1:n}^{(k-1)}, T_{1:n}, \lambda_c^{(k-1)})$ soit loi stationnaire
- $\log \lambda_c^c = \log \lambda_c^{(k-1)} + \eta_2$.
 - Candidat accepté avec probabilité telle que $\pi(\lambda_c | N_0^{(k)}, Z_{1:n}^{(k)}, T_{1:n}, \lambda_a^{(k)})$ soit loi stationnaire
- Pour $i = 1 \dots n$

 - simuler $Z_i^{(k)} \sim p_1 \delta_1 + p_2 \delta_2$ comme précédemment décrit.
 - Mettre à jour $N_i^{(k)} = N_0^{(k-1)} + \sum_{j=1}^i Z_j^{(k)}$
- $N_0^c = N_0^{(k)} + \eta$.
 - Candidat accepté avec probabilité telle que $\pi(N_0 | Z_{1:n}^{(k)}, T_{1:n}, \lambda_a^{(k)}, \lambda_c^{(k)})$ soit loi stationnaire

Illustration numérique

On reprend les 100 jeux de données précédents et on estime N_0 .

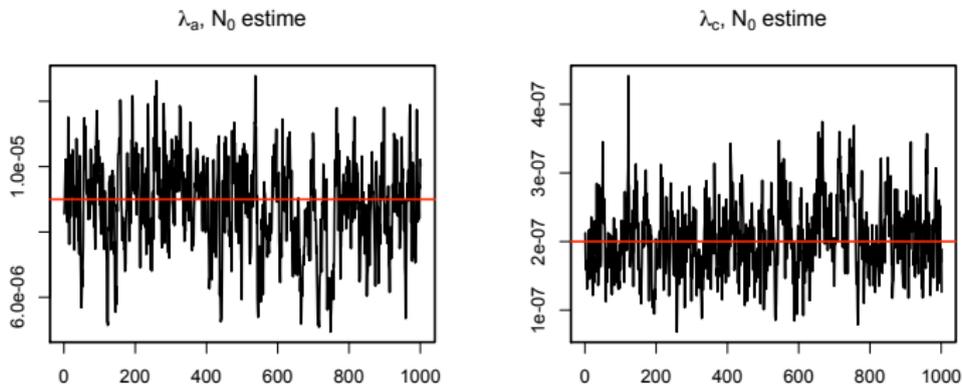


Fig.: Trajectoire des itérations de λ_a et λ_c avec N_0 estimé

Illustration numérique (2)

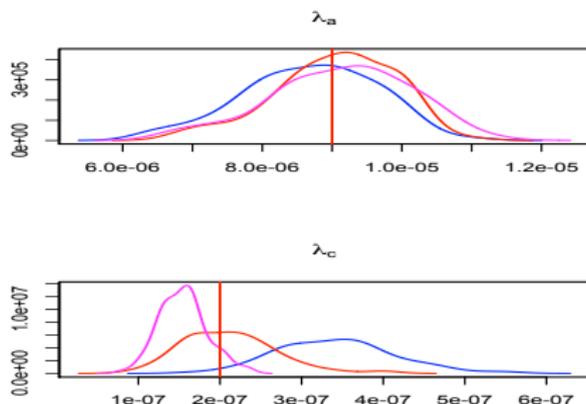


Fig.: Densité des estimateurs $\widehat{\lambda}_a^{(k)} = E[\lambda_a | T_{1:n}^{(k)}]$ et $\widehat{\lambda}_c^{(k)} = E[\lambda_c | T_{1:n}^{(k)}]$ obtenus sur 100 jeux de données avec 20000 itérations. En rouge, N_0 supposé connu. En bleu, N_0 inconnu fixé à la vraie valeur /4, en magenta, N_0 estimé

Conclusion. Reste à faire

- Construction d'une loi a priori adaptée au problème avec des outils complexes.
- Mettre en évidence la pertinence de notre prior sur une uniforme
- Tests sur données réelles