1

Surfaces aléatoires discrètes, aspects probabilistes et combinatoires.

Session organisée par Gilles Schaeffer

Une triangulation est formée d'un ensemble fini de triangles recollés de façon à former une sphère, et considérée à déformation près. On définit un modèle classique de surface aléatoire discrète par la distribution uniforme sur l'ensemble (fini) des triangulations à m triangles, et on l'étudie pour m tendant vers l'infini.

L'intérêt pour ces surfaces aléatoires est dû à la fois à la richesse des méthodes d'analyse auquelles elles se prêtent, et à leur pertinence comme modèle physique, illustrée par la mystérieuse relation conjecturale qui lie les exposants critiques de ce modèle aux exposants classiques de la physique statistique sur réseau régulier (relation KPZ).

Les exposés proposés illustrent la variété des techniques mises en oeuvres ces dernières années, qui vont d'intégrales de matrices à des approches bijectives et qui s'appuyent sur des outils probabilistes pour obtenir des résultats à la fois d'énumération, de convergence ou de calcul d'exposants critiques.

Références :

[1] Uniform infinite planar triangulations, O. Angel and O. Schramm, *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3),191–213 (2003).

[2] Random Planar Lattices and Integrated SuperBrownian Excursion, P. Chassaing and G. Schaeffer, *Probability Theory and Related Fields*, 128(2), 161–212 (2004)

[3] 2D Quantum Gravity, Matrix Models and Graphs Combinatorics, P. di Francesco, `arXiv.org :math-ph/0406013` (2004)

[4] First order asymptotics of matrix integrals ; a rigorous approach towards the understanding of matrix models, A. Guionnet and O. Zeitouni, *Comm. Math. Phys.*, 244, 527-569 (2003)

[5] Limit of Normalized Quadrangulations : the Brownian map, J.-F. Marckert and A. Mokkadem, `arXiv.org :math/0403398` (2004)

Adresse de l'organisateur :

Gilles Schaeffer
Laboratoire d'Informatique de l'X
LIX, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau France
E-mail : Gilles.Schaeffer@lix.polytechnique.fr
<http://www.lix.polytechnique.fr/~schaeffe/>

A propos des grandes cartes planaires.

par **Jean-François Marckert**

Une carte planaire est un plongement d'un graphe planaire connexe dans le plan, ou dans la sphère, considéré à homéomorphisme près. Les quadrangulations et les triangulations constituent des familles simples de cartes.

La recherche concernant ces objets a connu récemment un nouvel essor, pour deux raisons principalement : - la première est que les physiciens théoriciens se sont mis à utiliser des modèles de cartes (aléatoires) comme des discrétisations de métriques aléatoires. De nombreuses questions quant "à la forme des grandes cartes", mais également, de nombreux résultats et conjectures sont issus de ces travaux, - la deuxième est que de nouvelles bijections entre certaines familles de cartes et des objets plus simples (comme des familles d'arbres étiquetés) ont permis de mieux comprendre ces objets, et de les rendre accessible à l'analyse probabiliste.

Le but de cet exposé est de décrire les principaux ingrédients et résultats concernant l'étude asymptotique des cartes conditionnées à avoir n faces. (Le niveau d'exposition devrait permettre à tout un chacun de s'initier à ces objets).

Adresse :
Jean-François Marckert
LaBRI, Université Bordeaux 1
Université Bordeaux 1
351, cours de la libération
33450 Talence Cedex, France
E-mail : marckert@labri.fr

Des modèles de matrices aux bijections cartes-arbres.

par **Jérémie Bouttier**

Les surfaces aléatoires discrètes (ou cartes) ont été largement étudiées en physique théorique, en tant que modèles simples de gravité quantique bidimensionnelle ou de théorie de cordes. Un intérêt majeur de cette approche est de fournir les expressions explicites de multiples grandeurs pertinentes (fonctions de corrélation), car nombre de modèles discrets de surfaces aléatoires appartiennent à la classe des modèles «exactement solubles» (ou intégrables). Un outil de choix pour les physiciens est la méthode des modèles de matrices, qui ramène le problème du calcul des fonctions de corrélation à l'évaluation d'intégrales portant sur des matrices de grande taille. Cependant ce cheminement indirect, bien que fructueux, ne donne que peu d'explications sur la forme particulièrement simple des résultats obtenus.

Nous verrons que ceux-ci peuvent être retrouvés par une méthode élémentaire consistant à rechercher des correspondances (bijectives) entre cartes et arbres, dont l'énumération, et par-là même le calcul de certaines grandeurs probabilistes, sont bien plus aisés. Une autre conséquence remarquable de notre approche est qu'elle donne accès à une information fine sur la distance entre points d'une surface aléatoire, où la propriété d'intégrabilité se manifeste de manière surprenante.

Adresse :

Jérémie Bouttier
Service de Physique Théorique
Orme des Merisiers CEA Saclay F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France
E-mail : `jeremie.bouttier@cea.fr`

Grandes matrices aléatoires et énumérations de graphes.

par **Édouard Maurel-Segala**

Wigner a montré que l'asymptotique du spectre d'un grande matrice aléatoire hermitienne était décrite par les nombres de Catalan. Dans le cas où les entrées de la matrices sont gaussiennes, on sait encore décrire la mesure spectrale limite si l'on perturbe le modèle. Celle-ci s'exprime alors comme une série génératrice énumérant des graphes planaires de valence prescrite. Par ailleurs, les corrections à cette convergence font apparaître des énumérations de graphes plongés sur des surfaces de genre strictement positif. Ce type d'outil vient en grande partie de la théorie quantique des champs. L'idée principale pour montrer rigoureusement de tels résultats est de prouver qu'asymptotiquement les moments de la mesure spectrale satisfont les équations trouvées par Tutte pour les énumérations de graphes.

Adresse :

Édouard Maurel-Segala
UMPA
ENS de Lyon, 46, allée d'Italie 69364 LYON Cedex 07, France
E-mail : `Edouard.Maurel-Segala@umpa.ens-lyon.fr`

Analyse de surfaces aleatoires par les processus de branchement

par **Maxim Krikun**

Certaines triangulations et quadrangulations aléatoires infinies peuvent être caractérisées localement par une structure arborescente correspondant à certains processus de branchements critiques en temps renversé. Dans la renormalisation limite on retrouve un processus de branchement d'état continu, dans lequel la généalogie est décrite par les arbres reels stables (étudiés par Duquesne et Le Gall). Cette correspondence permet de calculer précisement des lois limites pour ces surfaces aléatoires.

Adresse :
Maxim Krikun
Institut Élie Cartan Nancy
Université Nancy 1, B.P. 239 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex France
E-mail : `maxim.krikun@iecn.u-nancy.fr`

Une bijection pour énumérer et engendrer des quadrangulations

par **Eric Fusy**

Dans les années 60, les travaux de W.T. Tutte ont permis d'établir par des méthodes algébriques plusieurs expressions très simples pour l'énumération de cartes planaires. Pour plusieurs familles de cartes, les expressions des coefficients impliquent des coefficients binomiaux, suggérant l'existence de bijections avec des familles d'arbres. Dans cet exposé, nous présentons une telle bijection entre la famille des quadrangulations sans arêtes multiples et une famille d'arbres dits bourgeonnants. Cette bijection repose sur des opérations locales de clotures de bourgeons pour fermer des faces quadrangulaires. La bijection inverse repose sur le calcul d'une orientation particulière a deux arêtes sortantes pour chaque sommet, qui peut être trouvée par un algorithme itératif simple. Cette bijection permet d'avoir une interprétation combinatoire de la formule trouvée par la méthode algébrique de Tutte. De plus, la bijection directe permet de faire de la génération aléatoire de quadrangulations et la bijection inverse permet d'avoir un codage optimal (i.e. entropique) pour la structure combinatoire des maillages quadrangulaires.

Adresse :
Eric Fusy
Projet Algorithme
INRIA Rocquencourt, B. P. 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France
E-mail : `eric.fusy@inria.fr`