1

Matrices aléatoires et Applications

Session organisée par Jamal NAJIM

Les matrices aléatoires sont un sujet d'étude classique de la théorie des probabilités depuis les travaux de Wishart (1928) et surtout Wigner (1955) qui a mis en évidence la convergence de la mesure spectrale d'une matrice aléatoire dont les dimensions tendent vers $+\infty$. Le développement de la théorie des probabilités libres, les liens entre matrices aléatoires et applications (sciences physiques, théorie de l'information (4), finance) et l'émergence de certaines lois universelles (loi de Tracy-Widom) ont suscité un regain d'intérêt très important pour l'étude des matrices aléatoires ces 10-15 dernières années. Le but de la session est de présenter certains de ces aspects.

Références :

[1] Z. D. Bai. *Methodologies in spectral analysis of large-dimensional random matrices, a review.* Statist. Sinica 3 :611-677, 1999.

[2] A. Guionnet. *Large deviations and stochastic calculus for large random matrices.* Probab. Surv. 1 (2004), 72–172 (electronic).

[3] L. Pastur. *A Simple Approach to the Global Regime of Gaussian Ensembles of Random Matrices*, submitted to Ukrainian Journal Math. (2005).

[4] A. Tulino and S. Verdu. *Random Matrix Theory and Wireless Communications* Foundations and Trends in Communications and Information Theory,1 :1–182, Now Publishers, 2004.

Adresse de l'organisateur :

Jamal NAJIM
CNRS et Télécom-Paris
Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications
35-37, rue Dareau
75014 Paris
E-mail : `najim@tsi.enst.fr`
<`http://www.tsi.enst.fr/~najim/`>

Estimates for moments of random matrices

par **Oleksiy Khorunzhiy**

nous proposons une méthode pour obtenir les estimations précises pour les moments des matrices aléatoires dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes.

Nous appliquons cette méthode à l'étude des matrices de la forme de bande ; en particulier, nous donnons l'expression pour la valeur critique de la largeur de la bande pour avoir la norme spectrale bornée ou non.

Adresse :

Oleksiy Khorunzhiy
Equipe "Probabilités-Statistiques"
Université Versailles Saint Quentin
45, Avenue des Etats-Unis
78035 Versailles UFR
E-mail : khorunzhy@math.uvsq.fr

Matrices aléatoires et lois indéfiniment divisibles en probabilités libres

par **Florent Benaych-Georges**

La notion de loi indéfiniment divisible existe en probabilités libres comme en probabilités clsassiques, en dimension un comme en dimension supérieure. Nous montrerons comment les matrices aléatoires permettent de passer d'une notion à l'autre.

Adresse :

Florent Benaych-Georges
DMA
Ecole Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
75230 Paris cedex 05
E-mail : benaych@dma.ens.fr

Les premières plus grandes valeurs propres de matrices de Wigner déformées

par **Delphine Feral**

Dans cet exposé, nous considérons des matrices aléatoires de Wigner dites déformées et qui sont définies par $M_N = \frac{1}{\sqrt{N}} W_N + A_N$ où W_N est une matrice aléatoire de Wigner de taille $N \times N$ complexe Hermitienne (ou réelle symétrique) et non-gaussienne, $(A_N)_N$ est une suite de matrices non aléatoires réelles et diagonales ayant toutes les mêmes valeurs propres fixes (indépendantes de N) et de rang ρ_N tel que $\frac{\rho_N}{N} \to 0$. Ici, nous nous intéressons à l'influence de la matrice A_N sur le comportement asymptotique ($N \to \infty$) du spectre des matrices M_N. Le modèle est construit de telle sorte que le Théorème de Wigner est toujours vrai. Ainsi, quelque soit la déformation A_N, la mesure spectrale de M_N converge p.s vers la loi semi-circulaire comme dans le cas classique (et bien connu) des matrices de Wigner correspondant ici à $A_N \equiv 0$. Par contre, le comportement des valeurs propres extrémales dépend de la déformation. Plus précisément, nous montrerons que, lorsque les premières plus grandes valeurs propres de A_N sont suffisamment loin de zéro, les valeurs propres correspondantes de M_N sautent p.s du support compact semi-circulaire limite tandis que le reste du spectre de M_N reste à l'intérieur de ce support. Ce résultat repose sur de nombreux arguments utilisés récemment dans le cadre des matrices de Wishart non blanches (c.f. [*]) où apparait le même type de phénomène.

[*] J. Baik and J.W. Silverstein, *Eigenvalues of large sample covariance matrices of spiked population models* (2004).

Adresse :

Delphine Feral
Laboratoire de Statistiques et Probabilités
Université Paul Sabatier (Toulouse III)
Institut de Mathématiques
31062 Toulouse Cedex 9
E-mail : dferal@cict.fr

Autour de l'intégrale sphérique en rang fini

par **Mylène Maida**

Nous montrerons dans cet exposé que l'une des intégrales à deux matrices les plus simples, dite aussi d'Itzykson-Zuber en physique, possède déjà un comportement très riche. D'une part son étude met en évidence des phénomènes intéressants de grandes déviations. D'autre part, son comportement asymptotique fait apparaître une fonctionnelle très importante en probabilités libres, la R-transformée. L'esposé se voudra introductif et ne nécessitera pas de connaissance préalable en probabilités libres.

Adresse :

Mylène Maida
Equipe "Probabilités-Statistiques"
Bâtiment 425, Université de Paris-Sud
91405 Orsay CEDEX
France email

Spectral measure of Gram matrices and Shannon's capacity of radio multi-antenna channels

par **Walid Hachem**

Consider a $N \times n$ random matrix $Q = Y + A$ where Y is a random matrix with centered independent elements having a variance profile and A is a deterministic matrix. We study the eigenvalue distribution of the Gram matrix QQ^T. This work is motivated by the problem of Shannon's mutual information evaluation for Multiple Input Multiple Output wireless communication channels. The behaviour of the mutual information

$$\frac{1}{N} \log \det \left(1 + \frac{QQ^T}{\sigma^2} \right)$$

where σ^2 is a known parameter is studied when n converges to infinity and N/n converges towards a constant.

Adresse :

Walid Hachem
SUPÉLEC, Département de Télécommunications
Plateau de Moulon, 3 rue Joliot-Curie
91192 GIF SUR YVETTE CEDEX
E-mail : `Walid.Hachem@supelec.fr`