EDP Stochastiques

Session organisée par Annie MILLET

Les équations aux dérivées partielles stochastiques décrivent des phénomènes physiques modélisés par des EDP perturbée par soit une force extérieure aléatoire dirigée par un processus gaussien, soit plus généralement dont les coefficients sont aléatoires. Les outils utilisés proviennent de l'analyse des EDP et du calcul stochastique.

Cette session présente des résultats récents obtenus dans plusieurs directions : l'étude de la convergence de schémas de discrétisation d'EDPS paraboliques ou hyperboliques fortement non-linéaires avec une perturbation dirigée par un bruit gaussien présentant ou non des corrélations spatiales, EDP linéaires et non-linéaires perturbées par un mouvement brownien fractionnaire, comportement asymptotique de solutions d'EDPS non-linéaires dirigées par un bruit espace-temps et homogénéisation d'EDP à coefficients aléatoires. Les exposés sont classés par ordre alphabétique des conférenciers.

Références :

[1] M. Barton-Smith, A. Debussche, L. Di Menza, *N*umerical study of two-dimensional stochastic NLS equations, Numer. Methods Partial Differential Equations, vol. 21, p.810-842 (2005).

[2] Da Prato, G., Tubaro, L. (2002) *Stochastic Partial Differential Equations and Applications*, Marcel Dekker.

[3] Da Prato, G., Zabczyck, J. (1992) *Stochastic equations in infinite dimensions.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge : Cambridge University University Press.

[4] de Bouard, A., Debussche, A., *A semi-discrete scheme for the stochastic nonlinear Schrödinger equation*, Numerische Math., vol. 96, p. 733-770 (2004).

[5] Nualart, D. (1995) *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Probability and its Applications, Springer Verlag.

[6] Rozovskii, B. *Stochastic evolution systems. Linear theory and applications to nonlinear filtering.*, Kluwer, Dordrecht.

[7] Walsh, J.B. (1986) *An introduction to stochastic partial differential equations*, École d'été de Probabilités de Saint-Flour, Lecture notes in Math. 1180, pp. 266-437, Springer Verlag.

Adresse de l'organisateur :

Annie MILLET
SAMOS-MATISSE Université Paris 1
Centre Pierre Mendès France
90 Rue de Tolbiac
75634 Paris Cedex 13 France
E-mail : `amillet@univ-paris1.fr`
<`http://matisse.univ-paris1.fr/millet/`>

Méthode de monotonie pour le comportement asymptotique d'edps et ses limites

par **Benjamin Bergé** et Bruno Saussereau

Nous prouvons de nouveaux résultats concernant la structure et les propriétés de stabilité de l'attracteur global associé à une classe d'edps paraboliques dirigées par un processus de Wiener multidimensionnel. On commence par utiliser des méthodes de monotonie pour montrer la décroissance exponentielle de la solution vers l'un des deux états d'équilibre. Puis nous montrons dans quelle mesure on atteint les limites de cette méthode. On utilise alors une estimation de décroissance exponentielle du champ aléatoire en sa variable spatiale pour compléter l'étude du comportement asymptotique.

Adresses :

Benjamin Bergé
Université de Neuchâtel
Institut de Mathématiques
Rue Émile Argand, 11
2007 Neuchâtel, Suisse
E-mail : `benjamin.berge@unine.ch`
<http://www.unine.ch/math/personnel/equipes/benaim/Berge/presentation_frame_bas.html>

Bruno Saussereau
Laboratoire de Mathématiques de Besançon
Département de Mathématiques
Université de Franche-Comté
16 route de Gray
25030 Besançon Cedex, France
E-mail : `bruno.saussereau@univ-fcomte.fr`
<http://www-math.univ-fcomte.fr/pp_Annu/BSAUSSEREAU/>

Quelques résultats sur l'analyse numérique d'une EDP stochastique dispersive

par **Anne de Bouard** et Arnaud Debussche

On rapportera quelques résultats obtenus en collaboration avec A. Debussche concernant l'analyse de l'erreur d'un schéma semi-discret en temps pour certaines équations de Schrödinger non linéaires stochastiques, additives ou multiplicatives. Le schéma est de type Crank-Nicolson, c'est une version semi-discrète en temps de celui utilisé par A. Debussche, L. Di Menza et M. Barton-Smith pour simuler numériquement ces équations. Le terme non linéaire considéré dans le drift permet l'existence de solutions explosives. Dans ce cas, l'analyse de l'erreur de discrétisation peut se faire jusqu'à un temps arbitrairement proche du temps d'explosion de la solution continue. On étudie alors, suivant les cas considérés, l'ordre fort et l'ordre faible de ce schéma.

Adresses :

Anne de Bouard
Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex, France
E-mail : `anne.debouard@math.u-psud.fr`
<http://www.math.u-psud.fr/~anm_edp/>

Arnaud Debussche
ENS Cachan (Antenne de Bretagne) et IRMAR
Avenue Robert Schumann
35170 Bruz, France
E-mail : arnaud.debussche@bretagne.ens-cachan.fr
<http://www.bretagne.ens-cachan.fr/math/people/arnaud.debussche/>

Vitesse de convergence de schémas de discrétisation d'équations d'évolution

par István Gyöngy et **Annie Millet**

On étudie les équations d'évolution stochastiques $u_t = u_0 + \int_0^t A_s(u_s)\,ds + \sum_j \int_0^t B_s^j(u_s)\,dW_s^j$ dans un espace de Banach avec des opérateurs qui satisfont des conditions de monotonie qui peuvent varier au cours du temps.

Des schémas de discrétisation explicites et implicites sont présentés ; ils permettent de prouver l'existence de solutions. D'autre part, plusieurs vitesses de convergence sont établies sous diverses hypothèses assez générales sur les opérateurs et des exemples sont décrits.

Adresses :

István Gyöngy
University of Edinburgh
School of Mathematics
University of Edinburgh
King's Buildings
Edinburgh, EH9 3JZ, United Kingdom
E-mail : gyongy@maths.ed.ac.uk
<http://www.maths.ed.ac.uk/people/>

Annie Millet
SAMOS-MATISSE Université Paris 1
Centre Pierre Mendès France, 90 Rue de Tolbiac
75634 Paris Cedex 13 France
E-mail : amillet@univ-paris1.fr
<http://matisse.univ-paris1.fr/millet/>

Homogénéisation d'EDP à coefficients aléatoires

par **Rémi Rhodes**

On considère l'EDP à coefficients aléatoires (stationnaires et ergodiques) suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\omega}{\partial t}(t,x) &= \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(t,x,\omega)\frac{\partial^2 u_\omega}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) + \sum_{i=1}^d b_i(t,x,\omega)\frac{\partial u_\omega}{\partial x_i}(t,x), \\ u_\omega(0,x) &= g(x) \end{aligned}$$

où $(t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$. Sous certaines conditions sur les coefficients, on montre que la solution u_ω vérifie (en un sens à préciser)

$$u_\omega(t/\varepsilon^2, x/\varepsilon) \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \overline{u}(t,x),$$

où $\overline{u}$ est la solution d'une EDP à coefficients déterministes. La preuve proposée ne nécessite aucune hypothèse d'ellipticité de la matrice a, ce qui permet d'inclure une classe d'exemples où le coefficient de diffusion dégénère.

Adresse :

Rémi Rhodes
LATP, Université de Provence
39, rue F. Joliot-Curie
13453 Marseille cedex 13, France
E-mail : `remi.rhodes@cmi.univ-mrs.fr`
<http://www.latp.univ-mrs.fr/equipes/equipe_proba/doct_proba.html>

Formules d'Itô pour les EDP stochastiques

par **Samy Tindel**

Les techniques récemment mises au point pour le mouvement brownien fractionnaire permettent aussi de dériver des formules de changement de variables pour les solutions d'EDP stochastiques, qui peuvent se voir comme des convolutions par rapport au drap brownien. Dans cet exposé, nous analyserons les résultats obtenus et les difficultés rencontrées dans les cas linéaire et non linéaire.

Adresse :

Samy Tindel
Institut Elie Cartan
Département de Mathématiques
Université Henri Poincaré
54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France
E-mail : `tindel@iecn.u-nancy.fr`
<http://www.iecn.u-nancy.fr/~tindel/>