Compte-rendu de lecture du livre de Jean-Pierre Dedieu : Points fixes, zéros et la méthode de Newton.

Jean Della Dora

Laboratoire de Modélisation et Calcul
Institut IMAG
Domaine Universitaire, BP 53, 38041 Grenoble cedex 9, FRANCE

Le livre de Jean-Pierre Dedieu édité dans la collection Mathématiques et Applications (Numéros 54) comprend deux parties essentielles :

– Les points fixes.
– La méthode de Newton.

Il traite de calculs de point fixe, de zéros de systèmes de fonctions et de la méthode de Newton. Si la première partie est classique (bien que les démonstrations de plusieurs résultats essentiels soient enfin accessibles en français), la deuxième qui s'appuie sur la théorie de Smale développée dans les années 80-90 est beaucoup plus originale et apporte beaucoup dans ce domaine. Le soin pris par l'auteur à donner des démonstrations détaillées est tout à fait louable et assez inhabituel.

L'ouvrage, avec ses rappels d'analyse, est accessible au niveau Master.

La préface de S Smale dit assez la philosophie du livre : "Here we have an introduction to the mathematics sufficient to enter into the world of complexity of real number algorithms. Its study of Newton's method is deep ..."

Nous allons détailler quelques points du document.

Première partie

La première partie reprend le classique théorème de Banach sur la contraction et est une mise au point claire sur la convergence quadratique.

Puis la classification des points fixes d'une application d'un espace de Banach est abordée. On s'intéresse tout d'abord aux endomorphismes pour définir les sous espaces contractés, dilatés et hyperboliques associés. Ayant ainsi traité le cas linéaire l'auteur expose naturellement le cas non linéaire à travers le théorème de Grobman-Hartman. Dans le cas d'un point fixe hyperbolique d'un difféomorphisme f de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de ce point f est (seulement) topologiquement conjugué à $Df(x)$. La démonstration est claire et bien décomposée.

Ensuite, naturellement , les variétés stables et instables locales sont étudiées. Les exemples qui suivent sont intéressants mais un peu académiques. On aurait souhaité (même en restant en dimension finie) que l'auteur explore les méthodes numériques et/ ou formelles pour construire ces variétés.

Cette partie sera très utile comme support d'une introduction aux systèmes dynamiques, il n'est pas courant de trouver une démonstration des résultats énnoncés aussi claire et détaillée.

Deuxième partie

L'auteur consacre cette partie à la méthode de Newton. Il se pose les questions classiques de convergence, de choix du point de départ ...tout en établissant la distinction fondamentale entre système possédant autant d'équations que d'inconnues et système sous et sur déterminés qui sont beaucoup moins classiques.

L'auteur pose le problème en les termes suivants :

f étant une application de classe $\mathcal{C}^p$ entre deux espaces de Hilbert $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, construire $V = f^{-1}(0)$ dans le cas ou V n'est pas de dimension 0.

Après un rappel sur l'inverse de Moore-Penrose dans le cadre hilbertien, l'auteur étudie le problème de la paramétrisation de la sous-variété V. On notera la méthode très pédagogique qui consiste à montrer le lien entre plusieurs quantités liées à l'invariant :

$$\gamma(f,x) = sup_{k\geq 2}||Df(x)^{\dagger}\frac{D^k f(x)}{k!}||^{\frac{1}{k-1}}$$

Le résultat (non trivial) de cette partie, dans laquelle f est supposée analytique, est celui de l'existence d'une paramétrisation analytique de la sous-variété au voisinage d'un point où $DF(x)$ est surjective. La question est alors de calculer cette sous-variété, la philosophie générale de l'ouvrage est naturellement d'appliquer la méthode de Newton. L'ensemble des points fixes d'un opérateur de Newton convenable sera V.

L'idée est de partir du linéarisé

$$f(x) + Df(x)(y - x) = 0$$

qui, dans le cas où f est surjective possède des solutions. Le choix est fait de la solution de norme minimale suivant les idées de Ben-Israel, Allgower et Georg ....
Des exemples d'applications sont donnés (fonction d'évaluation, problème symétrique de valeurs propres).
Le dernier chapitre traite de la méthode de Newton-Gauss pour les systèmes sur-déterminés. Dans le cas élémentaire la méthode est celle des moindres carrés, ici on recherche un point χ tel que

$$F(x) = \frac{1}{2}||f(x)||^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=m} |f_k(x)|^2$$

est minimum.
Ce problème d'optimisation global n'est pas trivial, aussi plusieurs stratégies sont possibles : optimisation locale ou recherche des points stationnaires de $DF(x) = 0$. C'est ce dernier cas qui intéresse l'auteur qui montre que deux voies sont possibles : la méthode de Newton ou une méthode due à Gauss (1809) qui consiste à linéariser $f(x) = 0$ au voisinage d'un point x puis à résoudre au sens des moindres carrés ce qui fournit un opérateur de Newton associé à des problèmes sur-déterminés.
Cette méthode est étudiée et des exemples sont donnés.
En conclusion la lecture de ce livre apporte beaucoup d'informations intéressantes et met en lumière une approche (inspirée par les travaux de S Smale et M Shub) qui méritait d'être développée dans un ouvrage pédagogique. Peut être manque-t-il à cet ouvrage une dimension plus effective, mettant en évidence les difficultés numériques des questions évoquées.