Notes de lecture

"Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux" Mathématiques & Applications 51, Springer, 2005 B. Bonnard, L. Faubourg et E. Trélat

La vocation de cet ouvrage est double : il s'agit tout d'abord d'un document dont l'originalité tient dans la volonté des auteurs de réunir deux domaines évidemment proches mais peu traités conjointement–et traditionnellement (arbitrairement ?) rattachés à des communautés distinctes–, la mécanique céleste et le contrôle des véhicules spatiaux (satellite, navette...) Ce rapprochement est pertinent et enrichissant pour au moins deux raisons : d'une part, la mécanique céleste constitue le cadre naturel de l'étude des trajectoires d'engins spatiaux, d'autre part les outils fondamentaux, à savoir la géométrie symplectique, les équations différentielles Hamiltoniennes et les techniques variationnelles, sont communs aux deux domaines. En effet, si les relations entre formalisme Hamiltonien et mécanique sont, à l'instar du lien entre calcul variationnel et contrôle, canoniques, il n'est pas moins vrai que les approches variationnelles constituent un outil moderne de recherche de trajectoires périodiques en mécanique céleste, de même que la structure de variété symplectique joue un rôle fondamental en contrôle optimal : le principe du maximum de Pontryagin exprime qu'une trajectoire optimale est la projection d'une courbe tracée sur le fibré cotangent de la variété définissant l'espace des états (lequel cotangent possède une structure naturelle de variété symplectique), courbe solution d'un système Hamiltonien particulier. Les deux premiers chapitres du livre servent donc de fondement aux deux thématiques abordées. Le deuxième objectif est la présentation de trois études applicatives réalisées en collaboration avec deux agences spatiales, en l'occurence le CNES[1] et l'ESTEC[2]. Ces trois études sont parfaitement complémentaires et sont l'occasion de couvrir de nombreux aspects tant théoriques qu'appliqués du contrôle et du contrôle optimal, puisqu'il s'agit tout d'abord du problème de contrôle d'attitude d'un satellite, de transfert orbital ensuite, de rentrée atmosphérique enfin. Alors que les deux

1. Centre National d'Études Spatiales
2. European Space Research & Technology Centre

premières concernent le contrôle d'un satellite vu soit comme un corps solide en rotation, soit comme une masse ponctuelle dans un champ central, le problème de l'arc atmosphérique vient compléter celui du transfert en introduisant la notion de contrainte sur l'état.

Le document est logiquement divisé en deux parties :

I. Mécanique céleste (chapitres 1 à 4)

II. Contrôle des véhicules spatiaux (chapitres 5 à 9).

Les deux premiers chapitres donnent respectivement des éléments de base sur la géométrie symplectique et les équations Hamiltoniennes. Le chapitre 2 est une introduction au problème des N corps, dans les cas N égal à deux (équation de Kepler) ou trois. Faisant suite à la présentation du problème des trois corps, la recherche de solutions particulières est abordée : le chapitre 4 s'intéresse aux solutions périodiques, notamment par des méthodes empruntées au calcul des variations.

Le chapitre 5 sur le contrôle d'attitude d'un satellite rigide s'ouvre sur des rappels de contrôlabilité : considérer des contrôles constants permet d'introduire de manière algébrique la notion d'ensemble atteignable. La faible contrôlabilité est obtenue sous la condition usuelle du rang (théorème de Chow, dit *de l'orbite*), laquelle donne, lorsqu'on lui adjoint la notion de Poisson-stabilité la contrôlabilité usuelle. La démonstration heuristique du théorème de Chow à l'aide de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff en dimension 3 (déjà donnée dans [2]) est caractéristique de l'esprit dans lequel le texte est rédigé qui privilégie la sémantique plutôt que l'exhaustivité technique. L'application aux équations d'Euler qui régissent l'attitude du satellite est immédiate et la contrôlabilité à l'aide d'une seule paire de rétrofusées en découle.

Le chapitre 6 traite du transfert orbital. La nouvelle génération de moteurs ioniques pour la propulsion de satellites est à l'origine depuis les années 90 d'un regain d'intérêt pour le contrôle des transferts orbitaux [7]. La puissance de tels moteurs étant, par contraste avec la propulsion chimique traditionnelle, très limitée (de l'ordre de 0.1 Newton pour un engin de deux tonnes), les modèles impulsionnels standards sont inadaptés et une modélisation différentielle doit être faite. En première approximation, le satellite est assimilé à une masse ponctuelle soumise à une force centrale. La commande est la poussée du moteur de sorte que la dynamique est l'équation de Kepler contrôlée, système du type sous-Riemannien avec dérive. Une discussion précise du rang de l'algèbre de Lie donne la contrôlabilité dans le domaine elliptique avec seulement deux poussées, l'une tangentielle ou orthoradiale, l'autre hors-plan. En effet, la dérive est périodique donc Poisson-stable et l'on conclut à l'aide des résultats du chapitre précédent. Outre la stabilisation asymptotique locale du système par fonction de Liapunov, un résultat global via le théorème de LaSalle est également présenté.

Le chapitre 7 est consacré au principe du maximum de Pontryagin dont une preuve complète est donnée dans le cas classique [1]. Pour les problèmes plus compliqués avec contraintes sur l'état, les premières conditions présentées sont celles, classiques, de Weierstraß. Il s'agit de conditions nécessaires d'optimalité d'un arc frontière dans le cadre du calcul des variations avec obstacle. Ces conditions, obtenues à l'aide de variations particulières, concernent d'une part l'arc frontière lui-même (condition de courbure), d'autre part les points de jonction avec la contrainte (jonction tangentielle ou réflexion, ces conditions provenant de l'évaluation de la fonction d'excès de Weierstraß). Ces résultats sont ensuite complétés dans le cas affine par la présentation du principe du maximum de [6]. Vient enfin l'étude fine des synthèses locales temps-minimales avec contrainte d'état en dimension deux et trois. On mesure bien dans ce cas l'efficacité de l'approche par forme normale utilisée systématiquement dans le texte.

Le chapitre 8 traite du problème de rentrée atmosphérique. Le CNES est à l'origine du projet (*cf.* [5] et [3]) dans le cadre de la mission *Mars sample return* : une phase atmosphérique pendant laquelle la navette se comporte comme un planeur est à considérer pour des altitudes variant entre 20 et 120 kilomètres (cas de l'atmosphère terrestre). Le contrôle est la configuration aérodynamique de l'engin, c'est-à-dire son angle de gîte (angle entre les ailes de la navette et un plan orthogonal à la vitesse). Le coût est le flux thermique total, sachant qu'*a priori*, trois contraintes d'état sont à prendre en compte : contrainte sur le flux thermique, sur l'accélération normale (contraintes de confort de vol), et sur la pression dynamique (contrainte de structure). L'étude d'un modèle simplifié de dimension trois où la rotation de la Terre est négligée avec la seule contrainte de flux thermique permet d'instancier l'analyse du chapitre précédent. Le problème de la stabilisation par une approche LQR est également abordé. Un contrôle quasi-optimal pour le modèle complet est finalement calculé en considérant deux phases, le modèle simplifié étant utilisé pendant la première (début de phase atmosphérique). La structure correspondante où deux contraintes d'état sur trois sont actives est également décrite, et une simulation numérique à l'aide du tir multiple fait l'objet de la section finale.

Le neuvième et dernier chapitre aborde les méthodes numériques en contrôle optimal, plus précisément les bases des approches dites indirectes (c'est-à-dire reposant sur le principe du maximum et sur une analyse mathématique préliminaire de la structure des solutions), *indirectes* par opposition à *directes* où il s'agit de discrétiser d'emblée le problème en faisant ensuite appel aux outils de programmation mathématique. La dernière section est consacrée à des développements algorithmiques récents de vérification de conditions du deuxième ordre sous la forme de calcul de points conjugués . Schématiquement, un trajectoire est localement optimale (localement au sens de la norme uniforme sur l'état, *i.e.* dans un tube) jusqu'au premier point conjugué, plus localement optimale ensuite (y compris au sens de la topologie plus fine de la norme uniforme sur le contrôle). La notion de point conjugué est introduite de façon synthétique grâce à l'utilisation du formalisme Lagrangien, tout en privilégiant le lien naturel avec les aspects algorithmiques, notamment les méthodes de tir présentées en début de chapitre. Les résultats et les méthodes numériques associées sont présentés dans le cas lisse [4, 8], et appliqués au problème de transfert orbital.

En conclusion, l'originalité et la pertinence d'un texte réunissant mécanique spatiale et contrôle des véhicules spatiaux, ainsi que la richesse et la complémentarité des études décrites dans la deuxième partie sont autant de gages que ce livre devrait naturellement trouver un public parmi les communautés concernées, et à leur interface.

J.-B. Caillau (ENSEEIHT)

Références

[1] A. Agrachev and Yu. L. Sachkov. *Control theory from the geometric viewpoint.* SISSA-ISAS, Trieste, 2002.

[2] B. Bonnard and M. Chyba. *The role of singular trajectories in control theory.* Springer-Verlag, 2001.

[3] B. Bonnard, L. Faubourg, G. Launay, and E. Trélat. Optimal control with state constraints and the space shuttle re-entry problem. *Journal of Differential and Control Systems*, to appear, 2003.

[4] B. Bonnard and I. Kupka. Théorie des singularités de l'application entrée-sortie et optimalité des trajectoires singulières dans le problème du temps minimal. *Forum Mathematicum*, 5:111–159, 1993.

[5] B. Bonnard and E. Trélat. Une approche géométrique du contrôle optimal de l'arc atmosphérique de la navette spatiale. *ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations*, 7:179–222, 2002.

[6] H. Maurer. On optimal control problems with bounded state variables and control appearing linearly. *SIAM J. Cont. Optim.*, 15:345–362, 1977.

[7] J. Noailles and T. C. Le. Contrôle en temps minimal et transfert orbital à faible poussée. *Équations aux dérivées partielles et applications*, articles in honour of J.L. Lions for his 70th birthday, pp. 705-724, Gauthier-Villars, 1998.

[8] A. V. Sarychev. The index of second variation of a control system. *Math. USSR Sbornik*, 41:338–401, 1982.