



Mathématiques et Finance :

15 ans déjà

Conference SMAI : IHP Nov 2005

Nicole EL KAROUI

Ecole Polytechnique, Paris

email : elkaroui@cmapx.polytechnique.fr

Quelle Finance ?
Pourquoi 15 ans ?

Finance de marché

La révolution des années 1970

- **Dérégulation** : Libéralisation du dollar, puis des taux d'intérêt
- **Internationalisation** des opérations financières
- Révolution **informatique**
- En France, 1986-87, **création du MATIF et du MONEP**

Les marchés

- Important élément de la vie quotidienne des gens (**fonds de pension**)
- Accroissement important de la participation de petits investisseurs (**e-business**)
- Attention médiatisée des grands **crashes financiers**

Industrie du Risque financier

Réponse de la communauté financière :

Un **marché** d'un type nouveau avec comme **objectif** de **négoier le risque** lui-même par l'intermédiaire de **produits dérivés**.

Chicago (1972-73), New York (1979), Londres(LIFE) (1982), Paris (MATIF, MONEP, EURONEXT) 1986 et 1987, Francfort (DTB) en 1990.

La dérégulation n'aurait pu être implémentée sans fournir aux investisseurs les moyens de **gérer leurs risques**.

- Plus que \$15 trillions annuellement en **nominal**
- Grand éventail de simples **contracts** (futures, options, swaps,..)
- Beaucoup de produits plus **exotiques** (credit derivatives, catastrophe bonds, exotic options, etc.)
- Différents **sous-jacents** : stocks, devises, taux d'intérêt, commodities...

Risque de Marché transféré des agents économiques au secteur bancaire.

Pourquoi 15 ans ?

Un peu d'histoire

- Dès 1987 à l'ENPC (Bouleau), 89 à l'X (Elie et NEK) et 90 sous forme de DEA, Paris VI, ou Paris VII, ou Dauphine entre autres, création de formation en Finance de marché **en Mathématiques Appliquées**, principalement en probabilité appliquée.
- Depuis le nombre de formations et les flux d'étudiants ne cessent d'augmenter, dans les Universités et les Ecoles d'ingénieurs.
- Les salles de marché recrutent de plus en plus d'ingénieurs
- Grand succès des quants français

Produits dérivés

Pourquoi des Math ? et lesquelles

Produits dérivés

*Les produits dérivés sont des **contrats** garantissant le cours de référence auquel une opération (d'achat ou de vente) d'un sous-jacent pourra être faite **dans le futur**, à une date précisée dans le contrat.*

Exemples

⇒ **Contrats à terme** : le cours de l'opération à échéance est fixé à la date de négociation. C'est une **promesse de vente**.

⇒ **Options d'achat ou option de vente**. Le cours fixé dans le contrat est utilisé comme **plafond ou comme plancher**.
L'opération ne sera réalisée au cours fixé que si le cours réel a dépassé le plafond(achat) ou le plancher (vente).

Cette **option** a un **prix** que Bachelier a cherché à expliquer.

Prix et arbitrage

⇒ **Le prix à terme** sur un actif négocié se calcule à partir des données de marché, comme **la valeur d'aujourd'hui capitalisée de l'intérêt**.

Si ce n'était pas le cas, on peut réaliser un **arbitrage**, c'est à dire un profit à coup sûr, possibilité exclus dans un marché liquide....

⇒ Dans le cas des **options**, l'exercice est plus compliqué et le prix dépend d'un **modèle de sous-jacent**.

Le point de vue naif : de calculer une **valeur estimée** des flux futurs à partir des observations historiques +(ou) le point de vue des **experts**

Le point de vue moderne

Black/Scholes/Merton (1973) : Prix Nobel 1997

Faire du temps son allié par une gestion dynamique des actifs pour réduire les risques

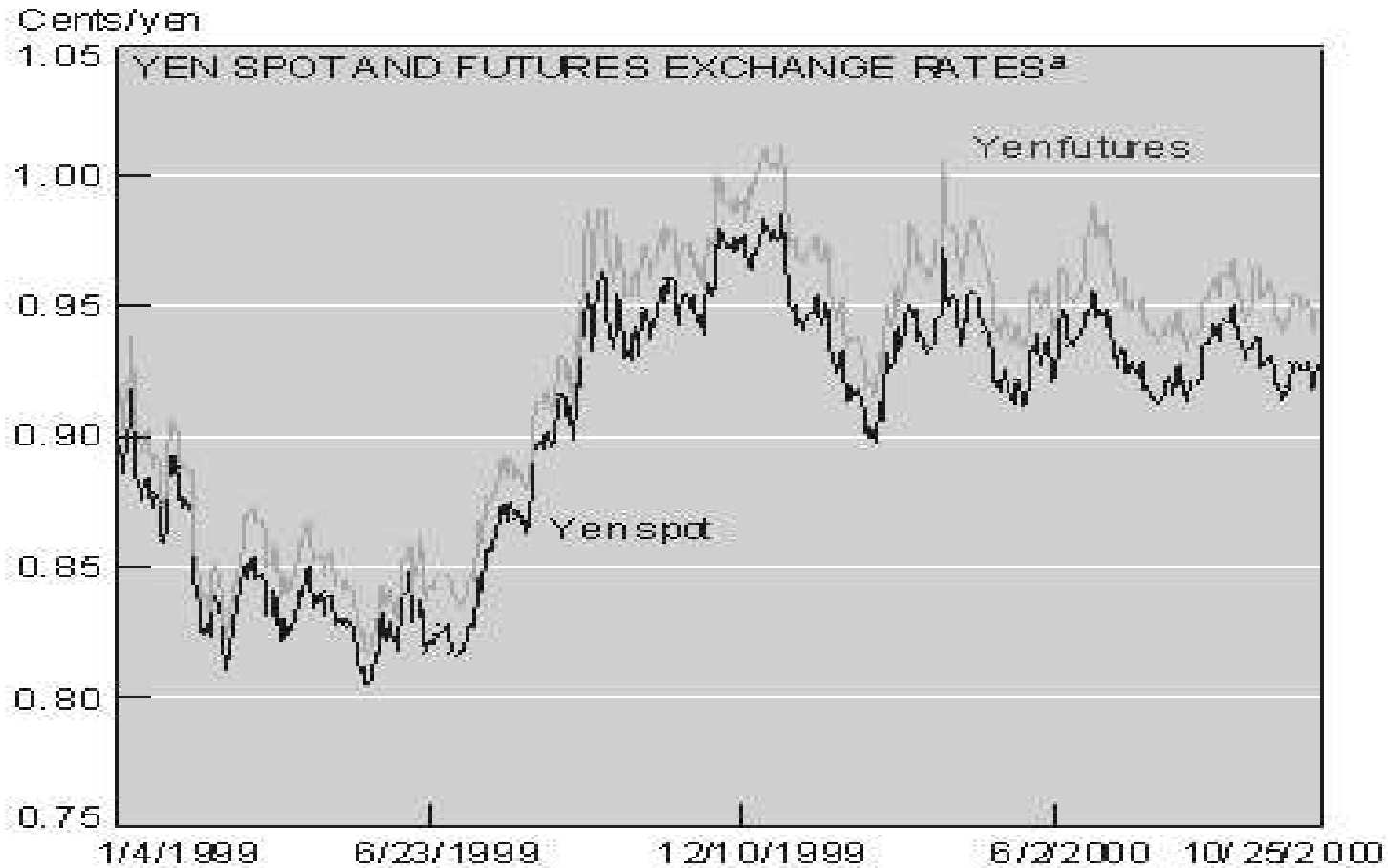
Options : un problème de cible aléatoire : On cherche à **approcher “au mieux”** le flux terminal par les **gains d’un portefeuille** plus la prime.

- En achetant et en vendant **au jour le jour** des quantités “bien choisies” de sous-jacent, on peut **“suivre” les évolutions** du marché et réduire considérablement le “risque final”.

Le suivi de marché devient **la réalité objective cohérente**.

Les mathématiques qui s’imposent : l’optimisation dans l’incertain + théorie des processus stochastiques.

Des exemples

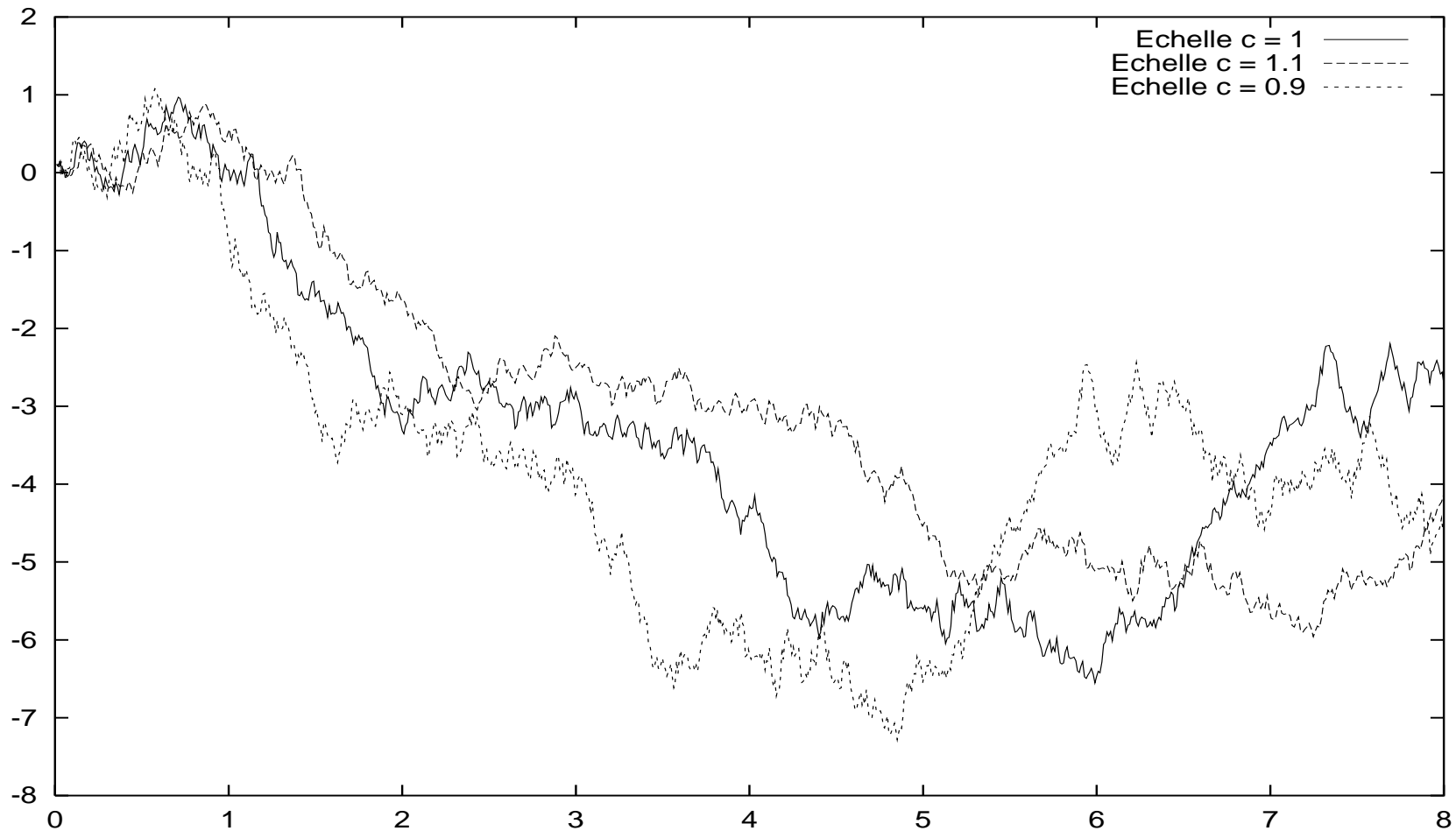


Dollar-Yen

pendant la période Avril 99-Nov 2000.

Simulation brownienne

Trajectoires de brownien simulées avec différents coefficients de diffusion



Théorie des processus stochastiques

Pendant ces 70 ans, la théorie mathématique du mouvement brownien et des processus stochastiques se développe de manière spectaculaire. **Bachelier (1900), Einstein (1905) et Wiener(1913), Paul Lévy (1930), K.Itô(1950)**

Le calcul stochastique

De quoi s'agit-il ? de définir un **calcul intégral et différentiel** portant sur des fonctions très peu **régulières**.

Alors qu'on peut toujours donner un sens à

$\sum_{i=0}^{n-1} \delta_{t_i} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) = V_{t_n}$, il est plus délicat de donner un sens à $\mathbf{V}_t = \int_0^t \delta_{\mathbf{u}} d\mathbf{X}_{\mathbf{u}}$, et encore plus de représenter $f(V_t)$ à l'aide d'intégrales. (*Formule d'Itô*)

Ces objets vont être les **outils théoriques** dont va avoir besoin la **finance** des années 70.

Premières conséquences

⇒ la quantification de la stratégie optimale repose sur l'utilisation d'un modèle dynamique du cours, mais ni le prix, ni la couverture ne dépendent de **la tendance du titre** (on retrouve le point de vue de Bachelier qui énonce ce point comme une règle indispensable à l'existence d'une transaction). Prix et couverture sont **indépendants de tout jugement** sur l'évolution future : une option d'achat dans un marché haussier, ou dans un marché baissier a quasiment la même valeur.

⇒ Il ne s'agit plus d'une **gestion basée** sur les avis des experts, mais **sur la cotation de marché**, sur les informations disponibles qui sont du domaine public, ou presque...

- ⇒ La stratégie sera **la même qu'il s'agisse d'actions**, de devises, de matières premières. L'idée d'un **fondamental** des actifs de marché qui refléterait la réalité économique sous-jacente n'est en rien prise en compte.
- ⇒ La raison essentielle en est la **fréquence des transactions**. Pour se couvrir correctement, il faut agir très fréquemment. La gestion des risques passe donc par la réalisation d'un très grand nombre de transactions, qui rendent très **difficile l'idée d'une taxe sur les transactions**, car il faudrait distinguer les transactions de couverture et les autres...
- ⇒ Les marchés dérivés sont donc des **producteurs de liquidité**, avec risque de peser sur la dynamique du cours du sous-jacent.

Du risque de marché au risque de modèle

Le vendeur d'option équilibre sa gestion sur **chaque contrat** par une **stratégie dynamique intertemporelle**, qui tire partie de l'information donnée par la cotation du sous-jacent, durant la vie du contrat.

Mais le calcul des poids de la stratégie repose sur le modèle retenu.

Choix de modèle : Mathématiquement, c'est un **problème inverse**. Ces dix dernières années, la réflexion sur ces questions a beaucoup évolué, à la fois sur le plan réglementaire, et sur le plan académique. Quantifier le risque de modèle est un enjeu cle du *risk – management* d'une salle de marché.

Impact de cette “révolution” dans le monde réel

Gestion des risques

Un message fort est transmis : on peut gérer en s’adaptant au marché côté les **risques quotidiens**. C’est effectif dans un certain nombre de situations. La connaissance public des marchés de sous-jacent suffit en théorie à couvrir les risques. La tentation est grande de transférer un grand nombre de risques vers les marchés financiers, qui semblent mieux outillés pour les gérer.

C’est le cas récemment du **risque de crédit**. Le savoir faire des experts est mis en balance avec les marchés dérivés qui traitent le risque de crédit presque comme celui d’autres sous-jacents. Il y a une perte complète de la notion d’**horizon**

moyen ou long terme. **Tous les risques sont ils couvrables ?**

Les risques extrêmes échappent à cette analyse.

Comptabilité

Partant du principe que des flux incertains identifiés dans le futur sont “couvrables”, la nécessité d’adapter la comptabilité à cette vision tournée vers le futur s’est faite sentir. Depuis un an environ, de **nouvelles normes** de comptabilité ont été définies en Europe et seront mises en place rapidement.

En guise de conclusions

- Les idées mathématiques comme le calcul différentiel stochastique, et bien sûr de nombreux autres outils des mathématiques ont été des éléments déterminants dans l'évolution des marchés
- Il faut se rappeler que le modèle n'est qu'un outil, aidant à résoudre une question spécifique : pour être efficace, il est indispensable de bien comprendre le contexte et de pouvoir dialoguer avec les utilisateurs
- Ma recherche théorique a été largement alimentée par ce dialogue
- Réciproquement, les mathématiciens ont des choses à dire sur certaines idées fausses de marché, concernant la dépendance par exemple. Mais cela n'a de sens que par rapport à la pratique des interlocuteurs

- Former au mieux des quants, maîtrisant les outils techniques pour pouvoir mieux mesurer les limites de leurs utilisations.
- les nouvelles structures comme la fondation Europlace de Finance, les fondation du risque seront des atouts dans cette direction