

LES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES À LA PRÉVISION DU TEMPS

Quelques défis mathématiques en modélisation de l'atmosphère

Jean PAILLEUX

Météo-France (CNRM)

42 avenue G. Coriolis

31057 Toulouse Cedex 1

Jean.pailleux@meteo.fr

**Journée « Mathématiques et
environnement »**

Institut Henri-Poincaré Paris

29 mars 2007

Trois défis mathématiques en prévision du temps

- L'intégration des équations d'Euler appliquée à l'atmosphère (largement résolu depuis 30 ans)
- Le contrôle optimal et l'assimilation des données en météo (largement résolu depuis 10 ans)
- Assimilation de données de type image ou objet (pas résolu)

La modélisation de l'atmosphère...

...s'appuie sur des modèles numériques intégrant les équations générales de l'hydrodynamique:

- Équation du mouvement(Newton)
- Équation de continuité
- Thermodynamique
- Équation des gaz parfaits
- (Equations de bilans de constituants: vapeur d'eau, eau liquide, ozone, etc...)

Équations en météorologie

- $\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}p} - 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V} + F_f$
- $\text{Div} \vec{V} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0$
- $dU(T) = \delta U + \delta Q$ (Travail + Chaleur)
- $p = \rho R T$
- $\frac{dq}{dt} = \text{Evaporation} - \text{Précipitation}$

$\vec{V}(u, v, w)$ = vecteur vitesse

P : pression

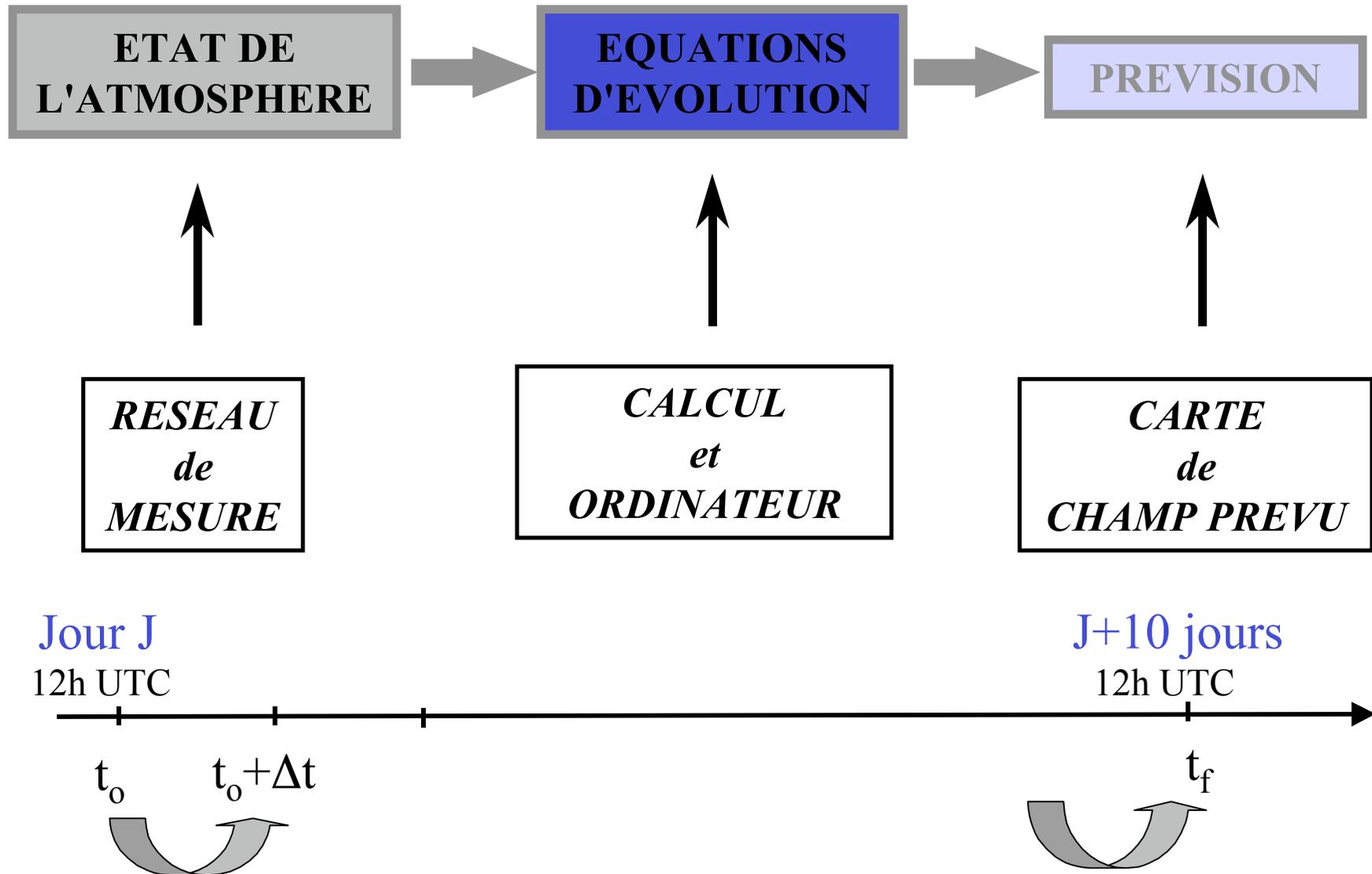
ρ : densité

U : énergie interne

T : température

q : concentration en vapeur d'eau

Principe d'un modèle numérique



Richardson en 1916

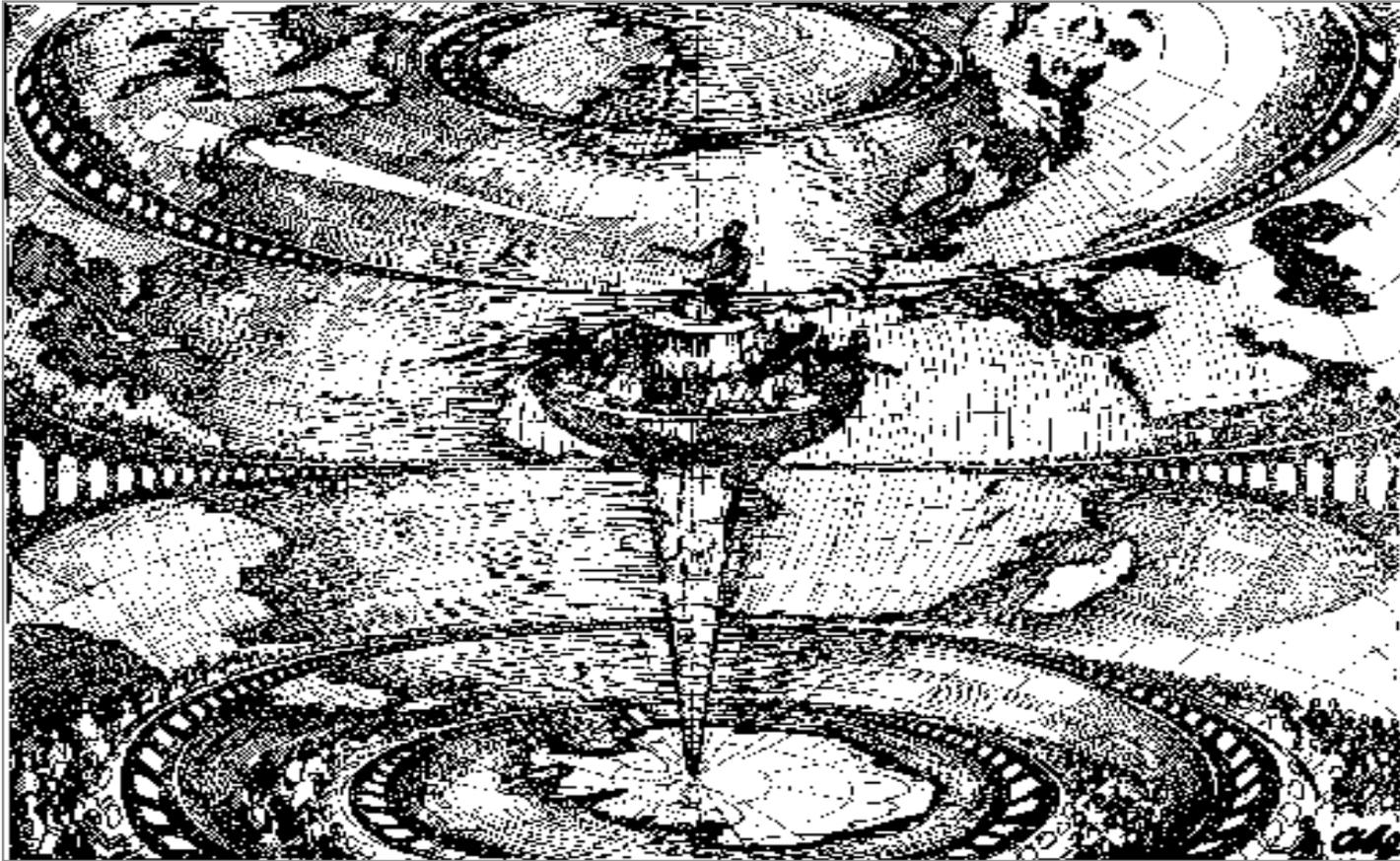


Schéma numérique d'avance temporelle

Δt le plus long possible

$\Delta t \leq k \cdot \Delta x$ (Stabilité numérique)

Eulérien \rightarrow Semi-Lagrangien

Équations en météorologie

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \dots$$

$$\frac{dT}{dt} = \dots$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \dots$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \dots$$

Approche

Lagrangienne

(ou particulaire)

Approche

Eulérienne

NAVIER

STOKES

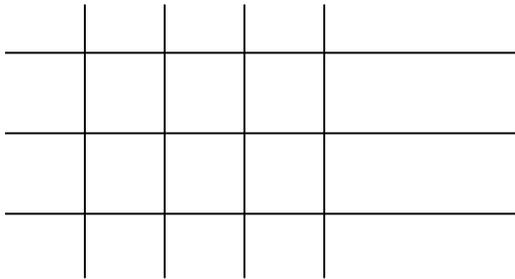
Approximation Hydrostatique $dp = -\rho g dz = -\rho d\Phi$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dots \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \dots$$

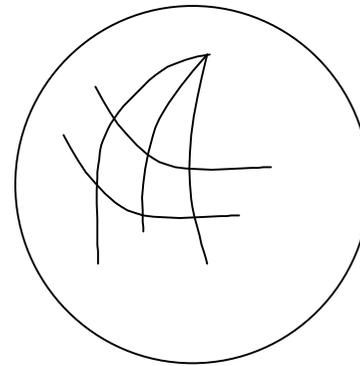
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \dots \quad \frac{\partial p_s}{\partial t} = \dots$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \dots$$

REPRESENTATION D'UN CHAMP $X(_,_)$ SUR LA SPHERE EN POINTS DE GRILLE

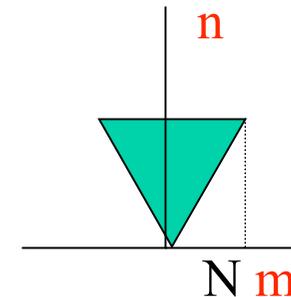


$X_{ij}, i=1,..$
 $j=1,..$



EN SPECTRAL

$$X(_,_)=\sum_{nm} a_n^m Y_n^m(_,_)$$



HARMONIQUES SPHERIQUES

$P_n^m(\sin_)$. $e^{im_}$ (Legendre/Fourier)

$$_Y_n^m = k_n^m Y_n^m$$

Un enjeu pour les modèles spectraux:
des transformées de Fourier et des
transformées de Legendre rapides

Trois défis mathématiques en prévision du temps

- L'intégration des équations d'Euler appliquée à l'atmosphère (largement résolu depuis 30 ans)
- Le contrôle optimal et l'assimilation des données en météo (largement résolu depuis 10 ans)
- Assimilation de données de type image ou objet (pas résolu)

PRINCIPE DE L'ANALYSE VARIATIONNELLE

MINIMISATION GLOBALE D'UNE
« FONCTION COUT:

$$J(\mathbf{X}) = \underbrace{J_o(\mathbf{X})}_{\text{(dist. aux obs.)}} + \underbrace{J_b(\mathbf{X})}_{\text{(dist. à l'ébauche)}}$$

$$= (\mathbf{HX}-\mathbf{y})^t \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{HX}-\mathbf{y}) + (\mathbf{X}-\mathbf{X}_b)^t \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{X}-\mathbf{X}_b)$$

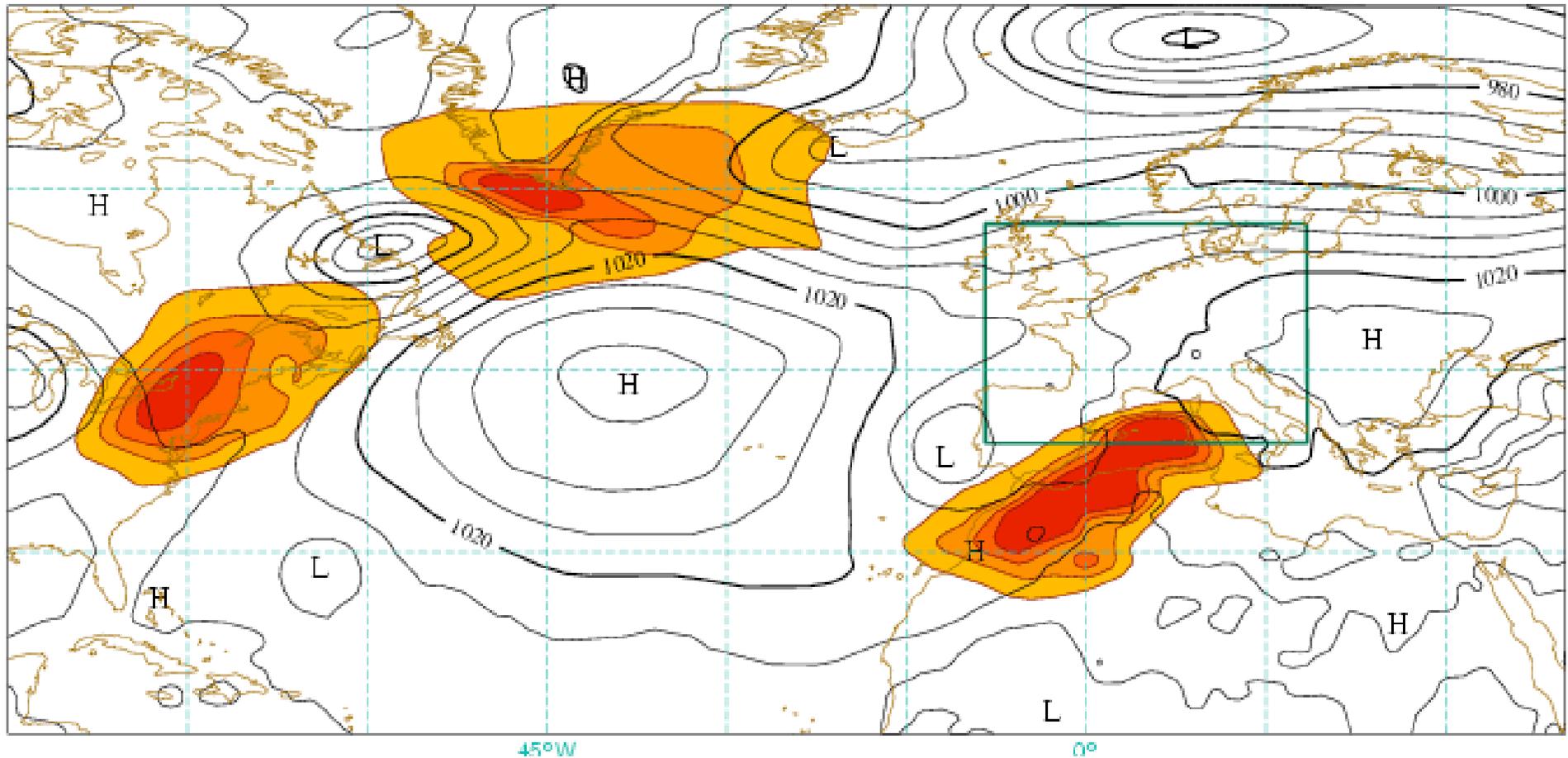
R et B: matrices de covariance d'erreurs

MODELES DIRECTS, LINEAIRE TANGENT et ADJOINT

$$\mathbf{X}(t_i) \text{ ----- } \mathbf{M} \text{ -----} \rightarrow \mathbf{X}(t_f)$$

$$\underline{\mathbf{X}}(t_i) \text{ -----} \mathbf{M}' \text{ -----} \rightarrow \underline{\mathbf{X}}(t_f)$$

$$\nabla \mathbf{X}(t_i) \leftarrow \text{-----} \mathbf{M}^* \text{ -----} \nabla \mathbf{X}(t_f)$$



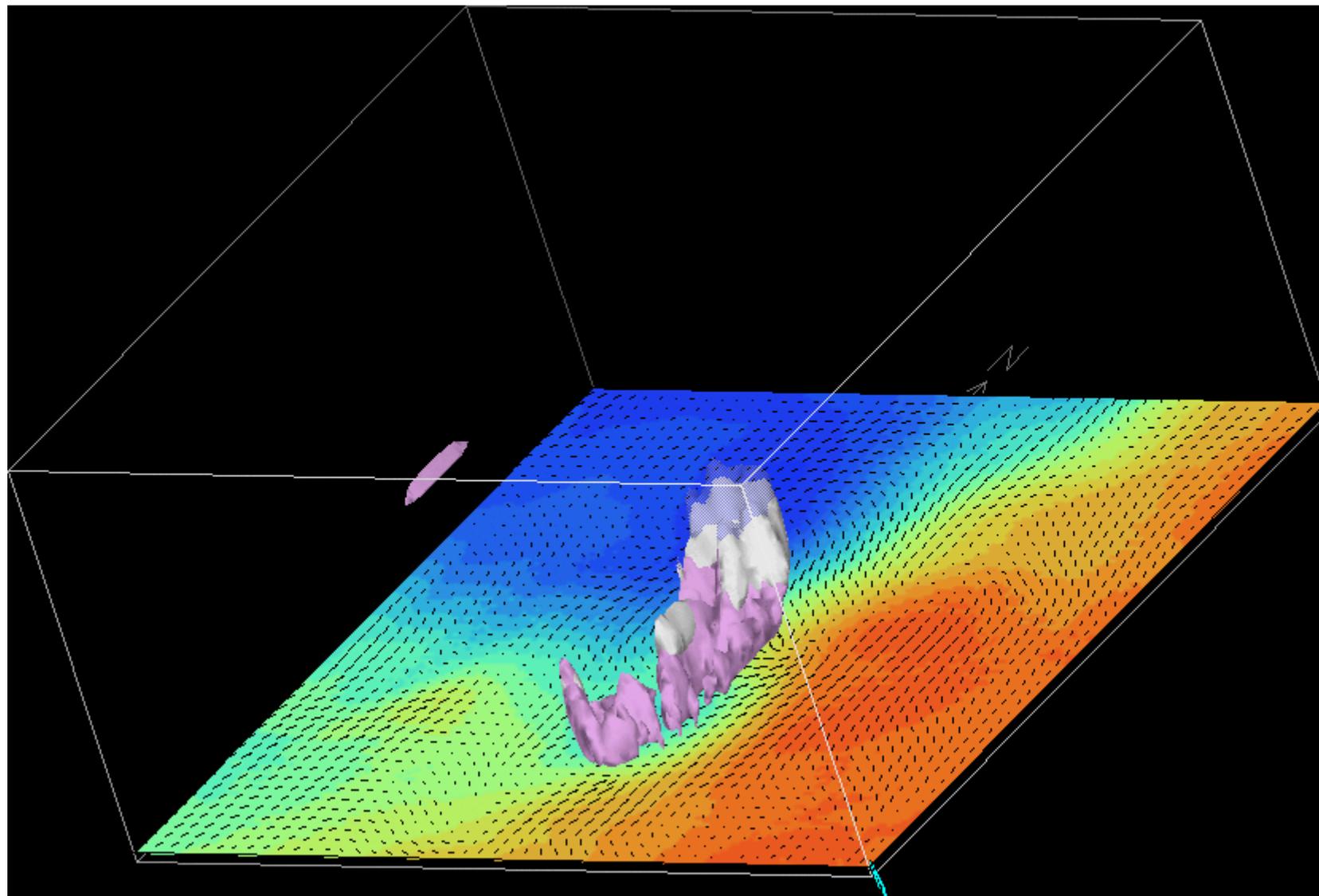
**Sensitivity computations using “moist SVs” for TREC 007
(observation time: 28 October 2003 18UTC , verification time 30
October 12 UTC).**

Trois défis mathématiques en prévision du temps

- L'intégration des équations d'Euler appliquée à l'atmosphère (largement résolu depuis 30 ans)
- Le contrôle optimal et l'assimilation des données en météo (largement résolu depuis 10 ans)
- Assimilation de données de type image ou objet (pas résolu)

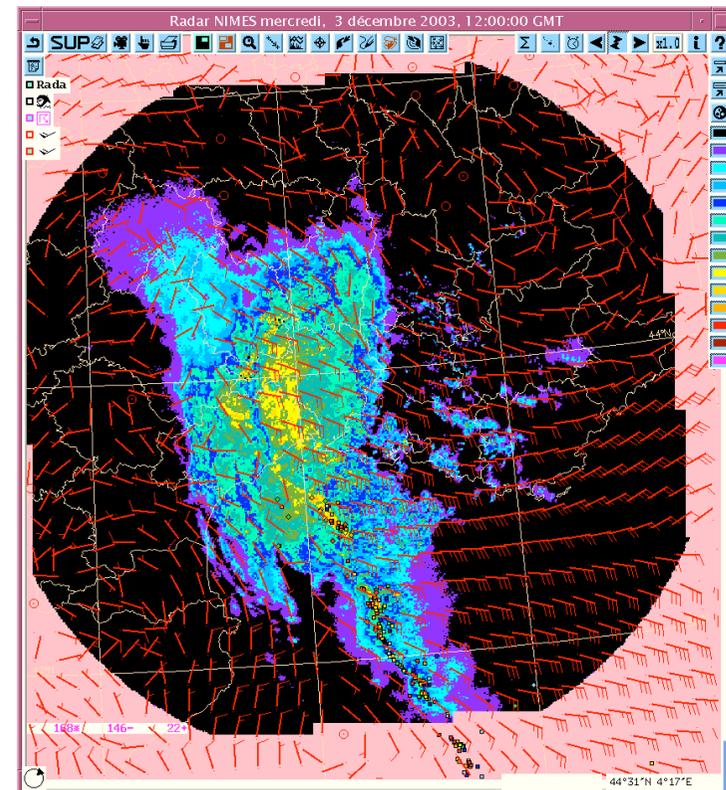
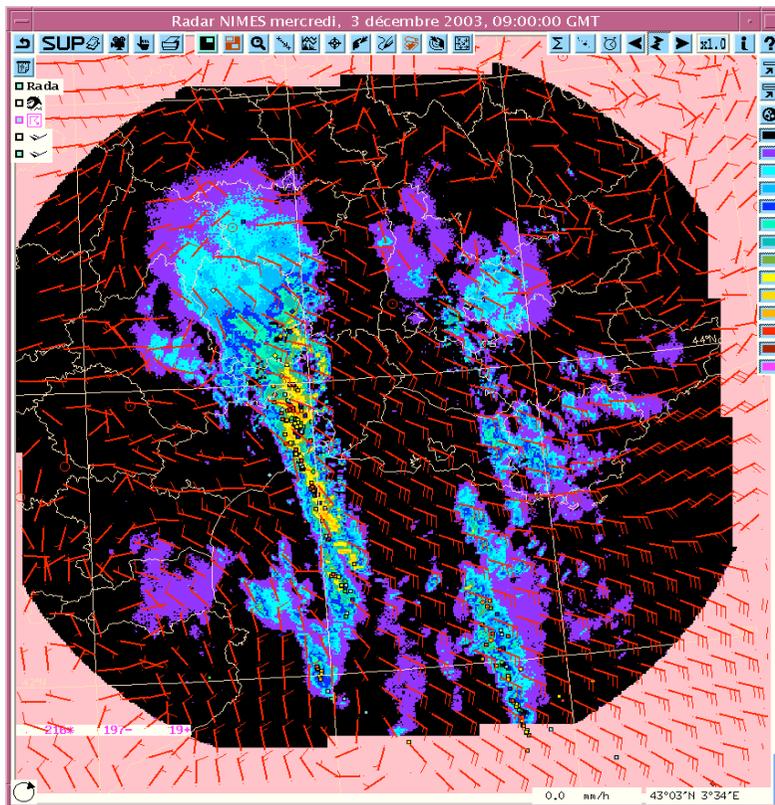
Simulation d'une structure orageuse par AROME (04-08-94 15 à 18 UTC)

2,5 km / dt=15s / domaine 144 * 144 / analyse Diagpack + bogus d'humidité



Red alert on « Herault »: 3

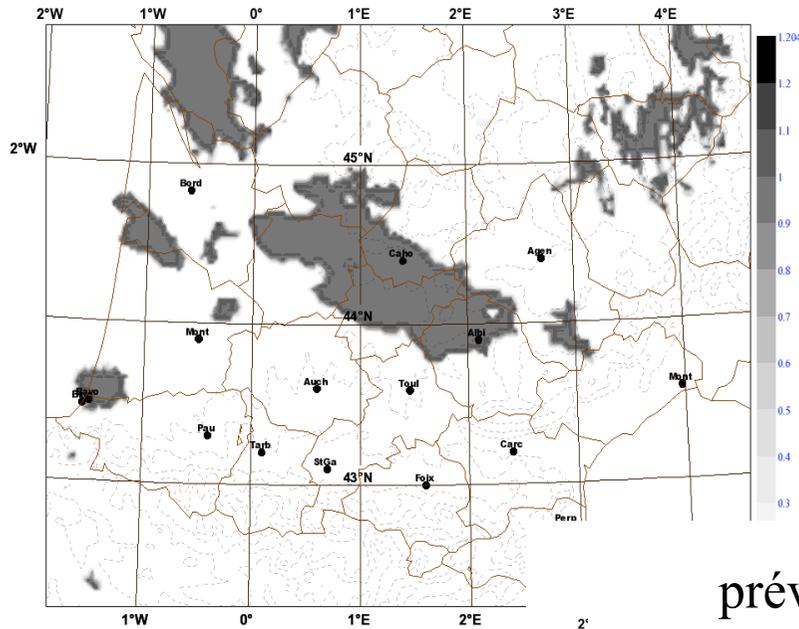
December 2003 (9 and 12h ALADIN forecasts from 00UTC + radar)



Simulation du brouillard

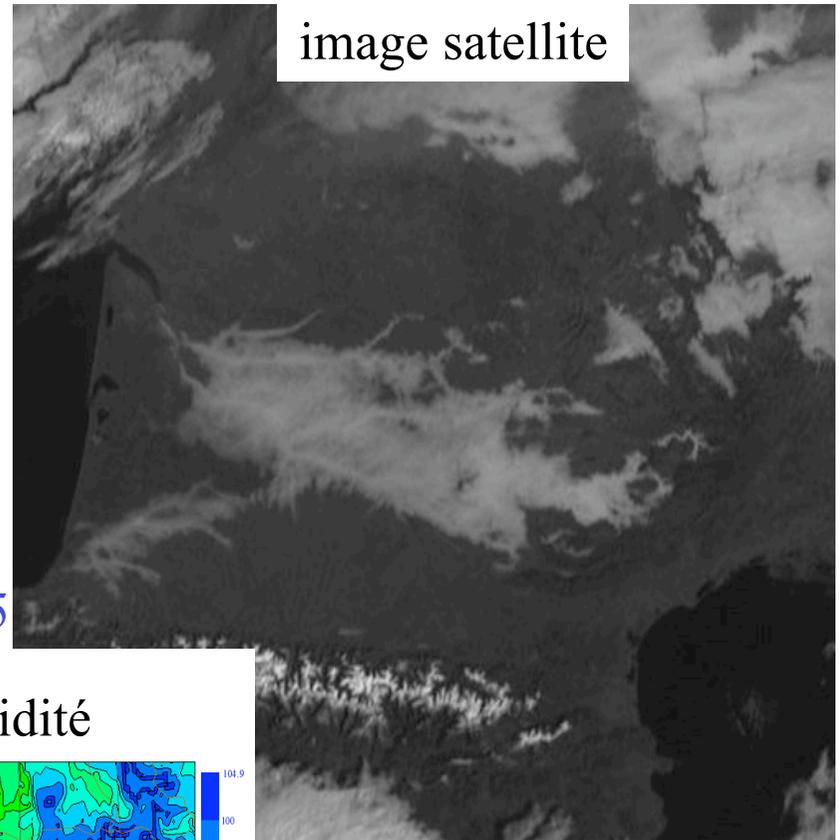
prévision Arome

Arome 2005111100+0900 Fog Cloud Cover (%) level 41

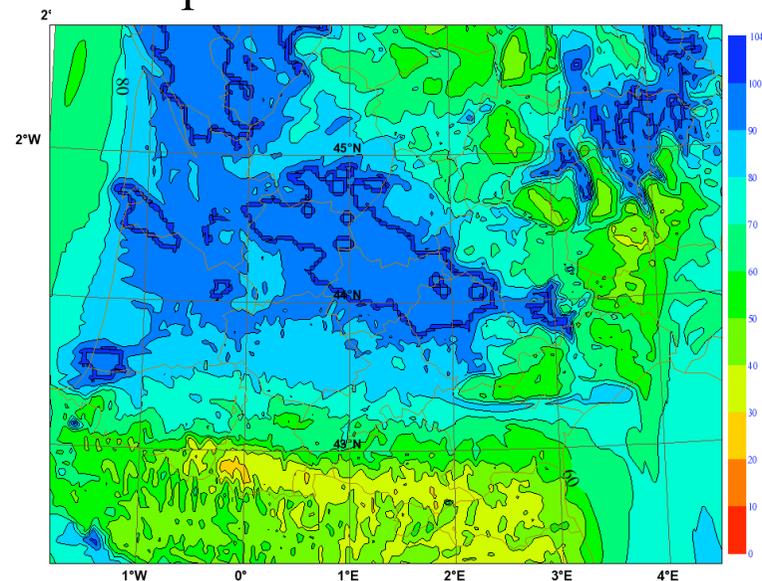


11 nov. 2005

image satellite



prévision d'humidité

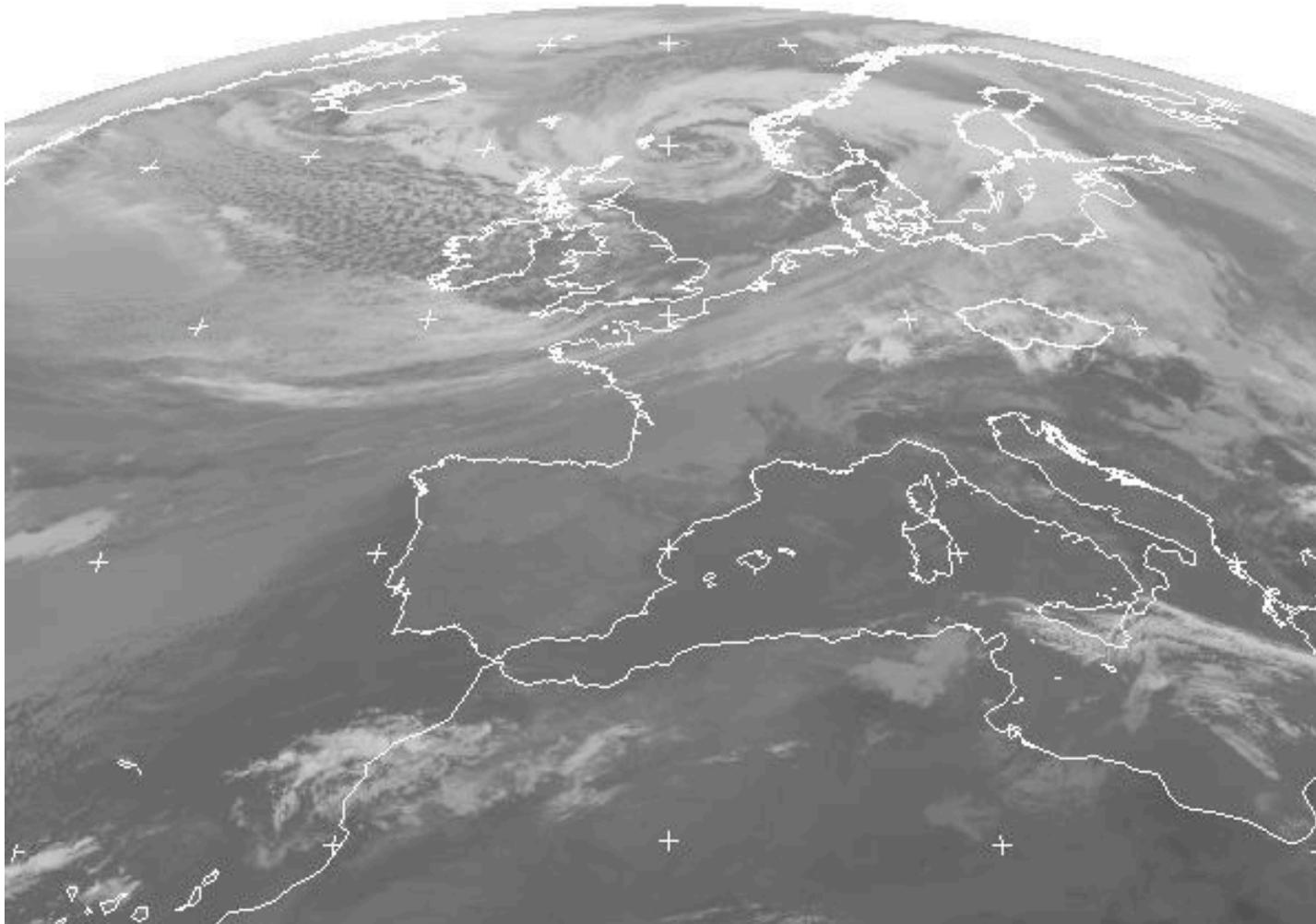


*Un casse-tête
mathématique:
réajuster les
variables du
modèle?*

Changement de temps du 17-19 mars 2007 (1) - www.infoclimat.fr

Copyright 2007 EUMETSAT

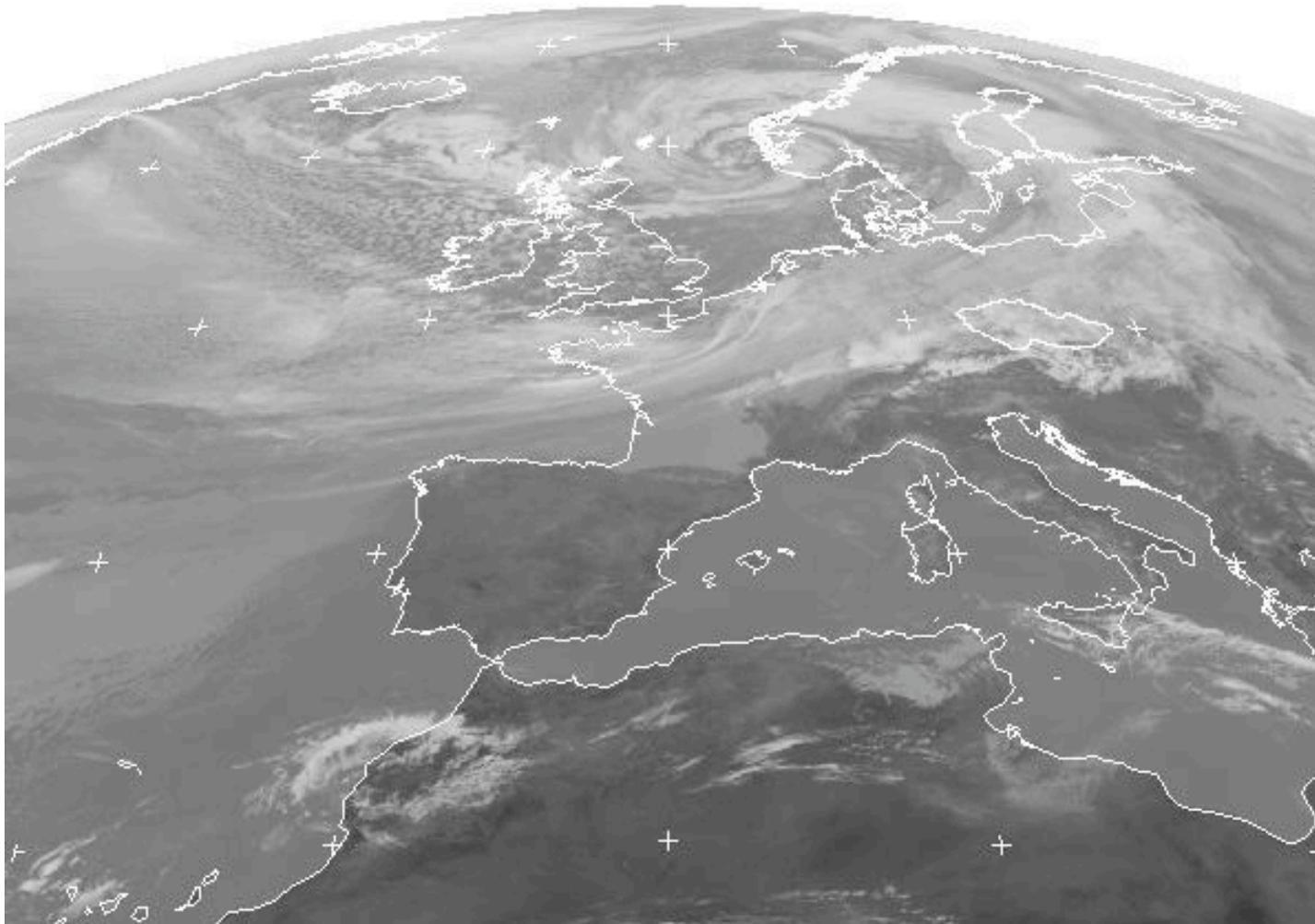
MET8 18 MAR 2007 0800 BNW IR_108 2



Changement de temps du 17-19 mars 2007 (2)

Copyright 2007 EUMETSAT

MET8 18 MAR 2007 1100 BNW IR_108 2



Changement de temps du 17-19 mars 2007 (3)

Copyright 2007 EUMETSAT

MET8 18 MAR 2007 1400 BNW IR_108 2



Utilisation de l'imagerie satellitaire dans les modèles de prévision

- Fabrication de pseudo-observations de vent par des techniques de corrélation d'image
- « Chirurgie » manuelle des prévisionnistes pour greffer des tourbillons au bon endroit dans l'état initial du modèle.
- (Assimilation ponctuelle de radiances correspondant à certains pixels de l'image)

ASSIMAGE

Etude des techniques d'assimilation de données
image dans des modèles de simulation des fluides
géophysiques

<http://www-rocq.inria.fr/clime/assimage/>