

Utilisation de modèles d'ordre réduit en aéroacoustique

Xavier Gloerfelt

Laboratoire SINUMEF - ENSAM, 75013 Paris
<http://www.sin-web.paris.ensam.fr>

Journées SMAI "Les mathématiciens et les industriels se parlent",
16 novembre 2006, Institut Poincaré, Paris

Construction d'un modèle d'ordre réduit

Objectifs

- Etudier la dynamique du modèle réduit :
 - répartition de l'énergie et forme des modes propres
 - interactions entre les modes
 - étude des bifurcations et de la stabilité
- Réduire le temps de calcul :
 - converger les statistiques et les spectres
 - faire varier un paramètre du modèle
- Proposer un système dynamique peu coûteux pour le contrôle
- Modéliser une entrée turbulente

Construction d'un modèle d'ordre réduit

3 étapes :

- 1 Décomposition orthogonale propre (POD) :
 - obtention d'un sous-espace de dimension réduite optimal pour l'énergie
 - résolution d'un problème aux valeurs propres
 - méthode des clichés (Sirovich, 1987)
- 2 Projection de Galerkin :
 - projection des équations de Navier-Stokes sur la base POD
 - obtention d'un système d'EDO à coefficients constants
- 3 Résolution du système d'EDO :
 - algorithme de Runge-Kutta
 - pas de stabilité type CFL \rightarrow coût réduit

\hookrightarrow très peu d'applications en régime compressible

- **Méthode des clichés** (Sirovich, 1987) :

$\{\mathbf{u}^k \in H \mid k = 1, \dots, N\}$ est un ensemble de clichés pour N pas de temps discrets.

L'idée principale consiste à écrire les modes comme une combinaison linéaire des clichés \mathbf{u}^k :

$$\phi = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{u}^k$$

On aboutit au problème aux valeurs propres suivant :

$$\mathbf{U} \mathbf{c} = \lambda \mathbf{c} \quad \text{où } \mathbf{U} \text{ est la matrice } N \times N \text{ telle que } U_{ij} = \frac{1}{N} \langle \mathbf{u}^j, \mathbf{u}^i \rangle$$

\mathbf{U} est autoadjointe donc les fonctions propres sont orthogonales; ce sont les **modes POD**.

Etape 2 : projection de Galerkin des équations

L'objectif est de déterminer les équations pour les coefficients POD $a_j(t)$, qui permettent d'exprimer la solution \mathbf{u} en fonction des M premiers modes POD :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^M a_j(t) \phi_j(\mathbf{x})$$

On considère le système dynamique suivant :

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad t \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

La base POD $\{\phi_k \mid k = 1, \dots, M\}$ étant orthonormée, la projection de Galerkin s'écrit :

$$\sum_{j=1}^M \dot{a}_j(t) \langle \phi_j, \phi_k \rangle = \boxed{\dot{a}_k(t) = \langle \mathbf{F}(\mathbf{u}), \phi_k \rangle}, \quad k = 1, \dots, M$$

qui forme un système de M EDO régissant l'évolution temporelle de $a_k(t)$.

Projection des éq. de Navier-Stokes en incompressible

$$\mathbf{u}_t = \mathcal{N}(\mathbf{u}) - \nabla p \quad \text{avec} \quad \mathcal{N}(\mathbf{u}) = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N a_i(t) \phi_i(\mathbf{x})$$

H est l'espace des fonctions C^∞ , à divergence nulle, à valeurs vectorielles dans Ω muni du produit scalaire standard : $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) dV$

La projection de Galerkin donne : $\dot{a}_k = \langle \mathcal{N}(\mathbf{u}), \phi_k \rangle - \langle \nabla p, \phi_k \rangle$

Le terme en pression peut être explicité

$$\langle \nabla p, \phi_k \rangle = \int_{\Omega} \phi_k \cdot \nabla p dV = \int_{\Omega} \text{div}(p \phi_k) dV = \int_{\partial \Omega} p \phi_k \cdot \mathbf{n} dS$$

- ↪ système d'EDO à coefficients constants
- ↪ le modèle POD-Galerkin en incompressible est bien éprouvé (voir Holmes, Berkooz & Lumley)
- ↪ on n'obtient pas des coefficients constants en compressible

équations isentropiques simplifiées Rowley *et al.* (*PhysD*189, 2004)

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{\text{Re}} \mathcal{L}(\mathbf{q}) + \mathcal{Q}(\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2)$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} u_{xx} + u_{yy} \\ v_{xx} + v_{yy} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}(\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2) = - \begin{pmatrix} u^1 u_x^2 + v^1 u_y^2 + \frac{2}{\gamma-1} c^1 c_x^2 \\ u^1 v_x^2 + v^1 v_y^2 + \frac{2}{\gamma-1} c^1 c_y^2 \\ u^1 c_x^2 + v^1 c_y^2 + \frac{\gamma-1}{2} c^1 (u_x^2 + v_y^2) \end{pmatrix}$$

Les inconnus $\mathbf{q} = (u, v, c)$ sont écrites dans la base POD :

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^M a_i(t) \phi_i(\mathbf{x})$$

⇒ modèle isentropique :

$$\dot{a}_k = \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{\text{Re}} \mathcal{L}_{ik}^1 + \mathcal{L}_{ik}^2 \right) a_i + \sum_{i,j=1}^M \mathcal{Q}_{ijk} a_i a_j$$

avec :

$$\mathcal{L}_{ik}^1 = \langle \mathcal{L}(\phi_i), \phi_k \rangle; \quad \mathcal{L}_{ik}^2 = \langle \mathcal{Q}(\bar{\mathbf{q}}, \phi_i) + \mathcal{Q}(\phi_i, \bar{\mathbf{q}}), \phi_k \rangle; \quad \mathcal{Q}_{ijk} = \langle \mathcal{Q}(\phi_i, \phi_j), \phi_k \rangle$$

Projection des équations de Navier-Stokes compressibles

Modèle complet

équations de NS complètes écrites pour les variables primitives (u, v, p) et pour le volume spécifique ($\varsigma = 1/\rho$) lollo et al. (TCFD13, 2000)

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathcal{Q}_1(\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2) + \frac{1}{\text{Re}} \mathcal{Q}_2(\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2)$$

⇒ modèle complet :

$$\dot{\mathbf{a}}_k = \sum_{i=1}^M (\mathcal{L}_{ik}^1 + \mathcal{L}_{ik}^2) \mathbf{a}_i + \sum_{i,j=1}^M (\mathcal{Q}_{ijk}^1 + \mathcal{Q}_{ijk}^2) \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$$

avec :

$$\mathcal{L}_{ik}^1 = \langle \mathcal{Q}_1(\bar{\mathbf{q}}, \phi_i) + \mathcal{Q}_1(\phi_i, \bar{\mathbf{q}}), \phi_k \rangle$$

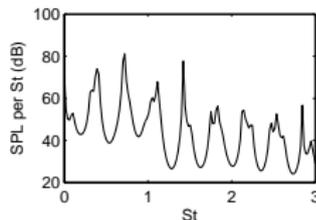
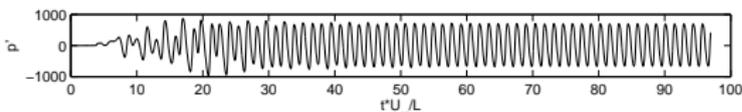
$$\mathcal{L}_{ik}^2 = \langle \mathcal{Q}_2(\bar{\mathbf{q}}, \phi_i) + \mathcal{Q}_2(\phi_i, \bar{\mathbf{q}}), \phi_k \rangle$$

$$\mathcal{Q}_{ijk}^1 = \langle \mathcal{Q}_1(\phi_i, \phi_j), \phi_k \rangle = \int_{\Omega} \left(\mathcal{Q}_{11} \phi_{\varsigma}^i + \mathcal{Q}_{12} \phi_u^i + \mathcal{Q}_{13} \phi_v^i + \mathcal{Q}_{14} \phi_p^i \right) dV$$

$$\mathcal{Q}_{ijk}^2 = \langle \mathcal{Q}_2(\phi_i, \phi_j), \phi_k \rangle = \int_{\Omega} \left(\mathcal{Q}_{21} \phi_{\varsigma}^i + \mathcal{Q}_{22} \phi_u^i + \mathcal{Q}_{23} \phi_v^i + \mathcal{Q}_{24} \phi_p^i \right) dV$$

DNS 2-D d'un écoulement affleurant une cavité

pression fluctuante en ($x = -2.82D$, $y = 9.86D$)

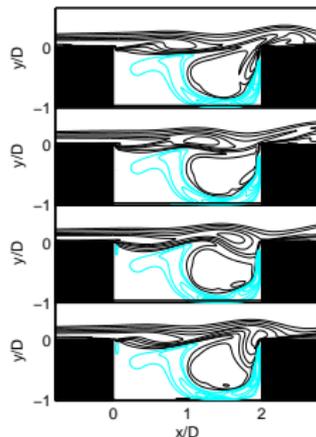


● Paramètres physiques :

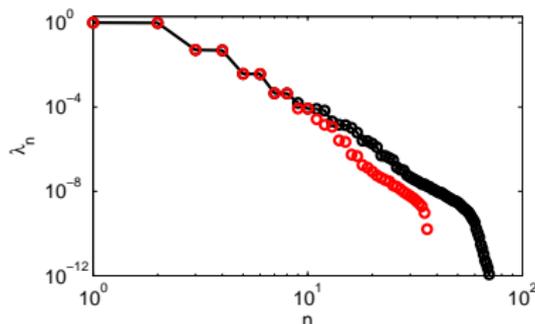
- Vitesse externe : $M=0.6$, $U_0=208$ m/s
- Dimensions de la cavité : $L/D=2$, $Re_D=1500$
- Couche limite incidente: $L/\delta_\theta=56.8$, $Re_\theta=52.8$
- Domaine de calcul : $L_x=13D$, $L_y=14D$

● Paramètres numériques :

- Maillage cartésien non uniforme : 132×118 points dans la cavité et 351×213 en dehors
- $CFL \approx 1 \Rightarrow \Delta t = 1.03 \times 10^{-9}$ s
- 100 000 itérations puis on stocke les clichés toutes les 40 itérations



- Nombre de clichés N pour construire la base POD :
 - 74 clichés, soit 2 périodes d'oscillation (-o-)
 - 37 clichés, soit 1 période d'oscillation (o o)

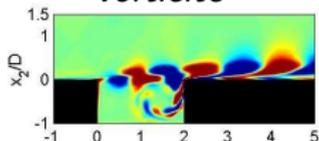


- ↪ les modes sont groupés par paires
- ↪ déphasage de $\pi/4$ entre deux modes d'une paire (symétrie de translation)
- ↪ 4 modes représentent 99.58% de l'énergie; les 8 premiers modes représentent 99.98%

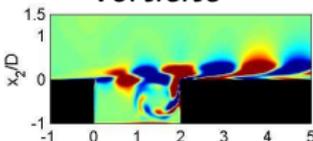
Décomposition orthogonale propre

Visualisation des modes POD avec le modèle isentropique

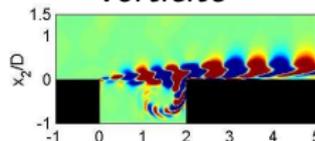
Mode 1
vorticité



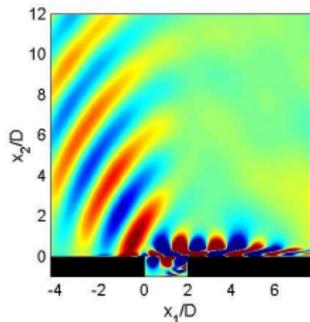
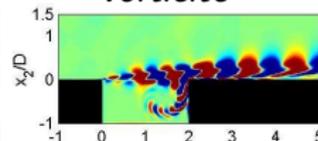
Mode 2
vorticité



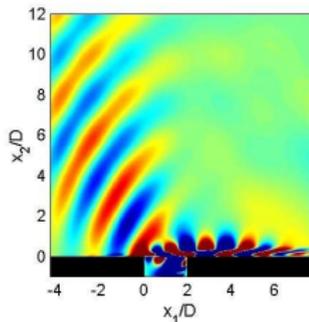
Mode 3
vorticité



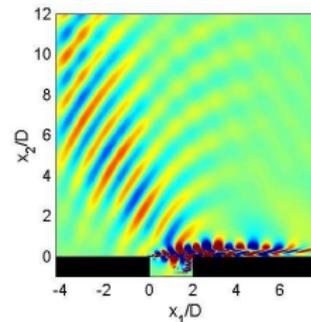
Mode 4
vorticité



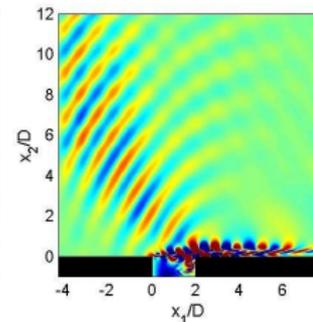
vitesse u



vitesse u



vitesse u



vitesse u

mode 1 : 48.3 %

mode 2 : 46.6 %

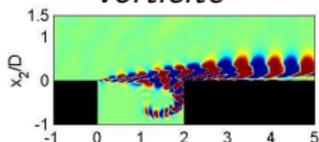
mode 3 : 2.4 %

mode 4 : 2.32 %

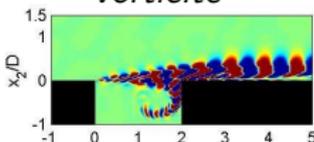
Décomposition orthogonale propre

Visualisation des modes POD avec le modèle isentropique

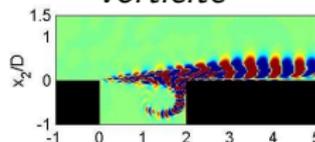
Mode 5
vorticité



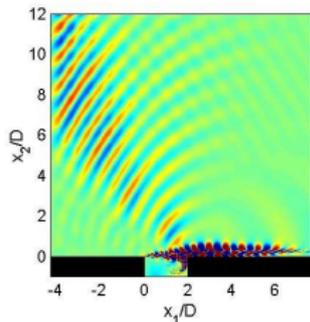
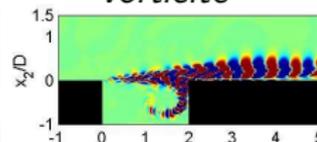
Mode 6
vorticité



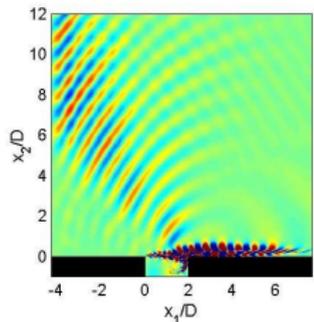
Mode 7
vorticité



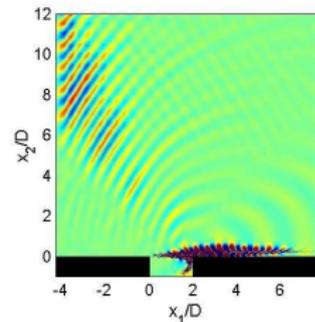
Mode 8
vorticité



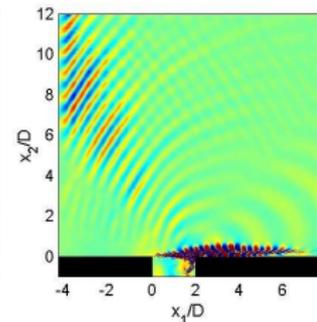
vitesse u



vitesse u



vitesse u



vitesse u

mode 5 : 0.182 %

mode 6 : 0.177 %

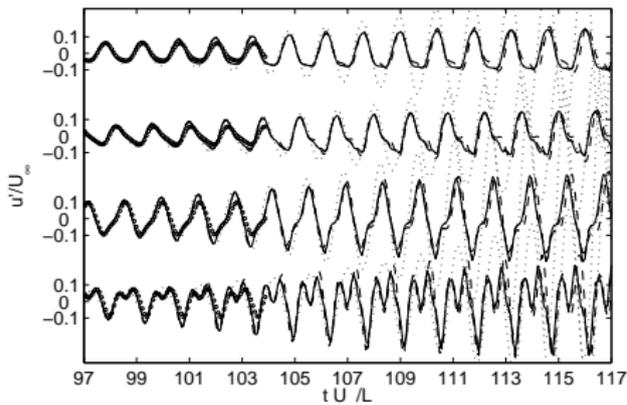
mode 7 : 0.022 %

mode 8 : 0.021 %

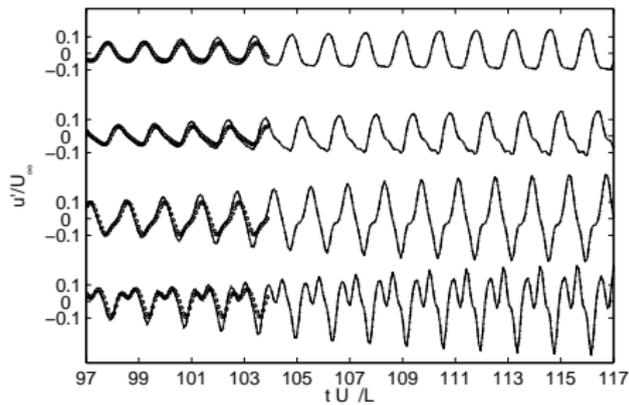
Reconstruction POD/Galerkine avec le modèle isentropique

Influence du nombre de modes et de clichés

Evolutions temporelles de u' pour 4 capteurs situés la couche de mélange :



(.....) : 2 modes;
(---) : 4 modes;
(——) : 8 modes;
(-.-.-) : 12 modes;
(●●) : DNS

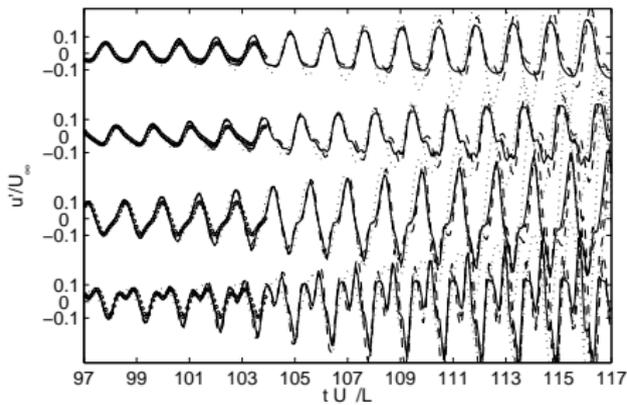


(——) : 37 clichés;
(.....) : 74 clichés;
(-.-.-) : 180 clichés;
(●●) : DNS

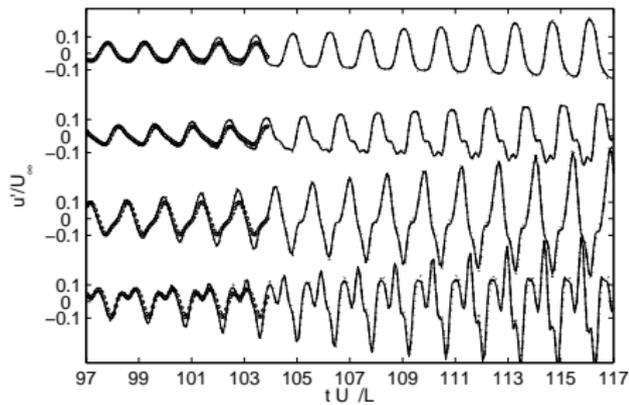
Reconstruction POD/Galerkine avec le modèle complet

Influence du nombre de modes et de clichés

Evolutions temporelles de u' pour 4 capteurs situés la couche de mélange :



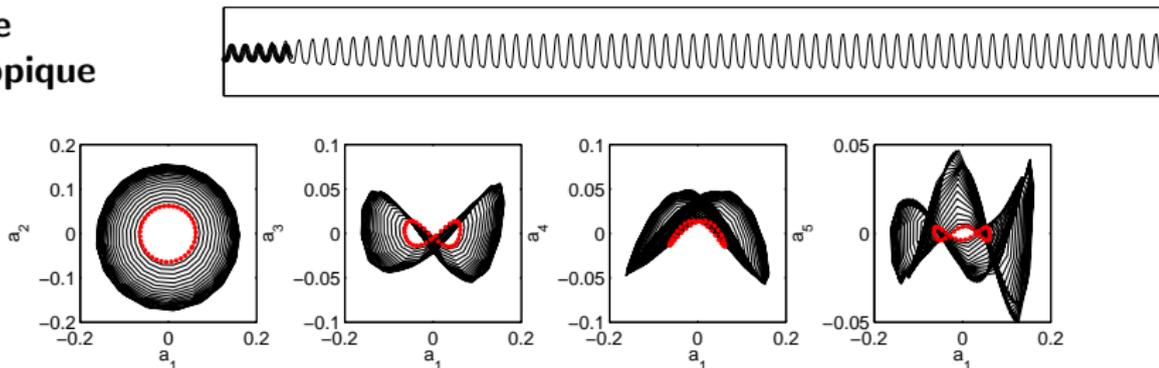
(.....) : 2 modes;
(---) : 4 modes;
(——) : 8 modes;
(-.-.-) : 12 modes;
(●●) : DNS



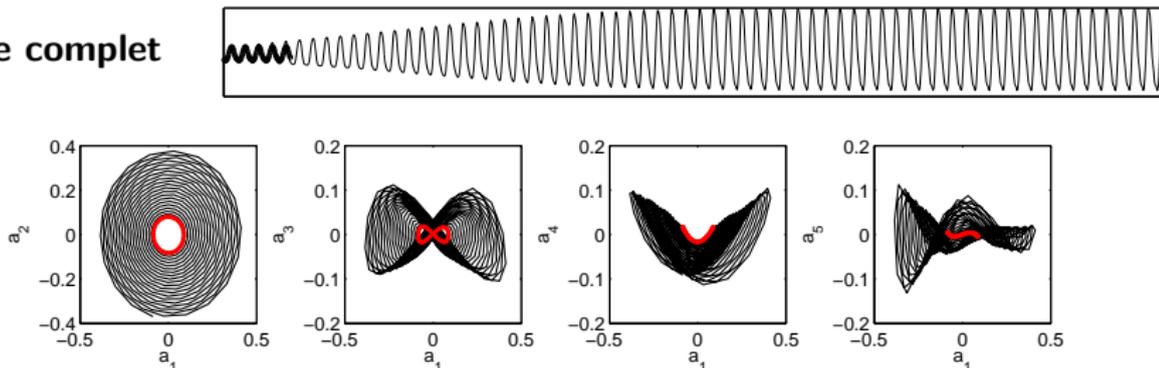
(——) : 37 clichés;
(.....) : 74 clichés;
(-.-.-) : 180 clichés;
(●●) : DNS

Cycles limites erronés

modèle
isentropique



modèle complet



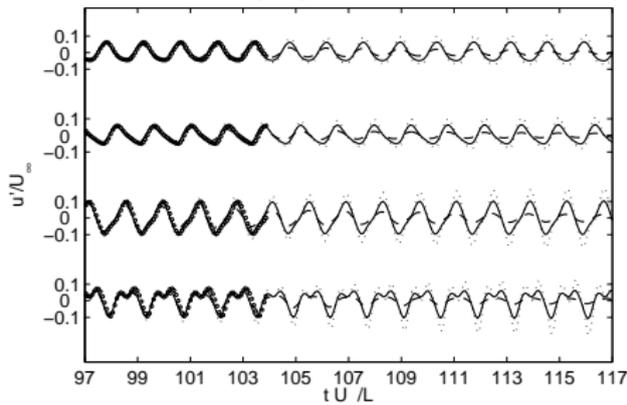
- ↪ le modèle complet est plus sensible que le modèle isentropique
- ↪ il faut introduire une technique de stabilisation

- introduction d'une viscosité turbulente ν_t
type Heisenberg (Podvin *et al.*, *JFM* 1998, Cordier *et al.*, *AIAAP* 2004)
- introduction d'une viscosité spectrale
(Sirisup & Karniadakis, *JCP* 2004)
- dissipation due au schéma numérique
(Iollo, *Comp.Vis.Sci* 2000)
- produit scalaire dissipatif en prenant une norme dans un espace de Sobolev (Iollo, *TCFD* 2000)
- prise en compte du terme en pression en régime incompressible
(Galetti *et al.*, *JFM* 2004, Noack *et al.*, *JFM* 2005)
- utilisation d'un terme de pénalisation
(Sirisup & Karniadakis, *Phys.D* 2004)
- calibration des coefficients POD
(Couplet *et al.*, *JCP* 2005)

Stabilisation des modèles POD/Galerkine

Introduction d'un terme de viscosité constant

modèle isentropique



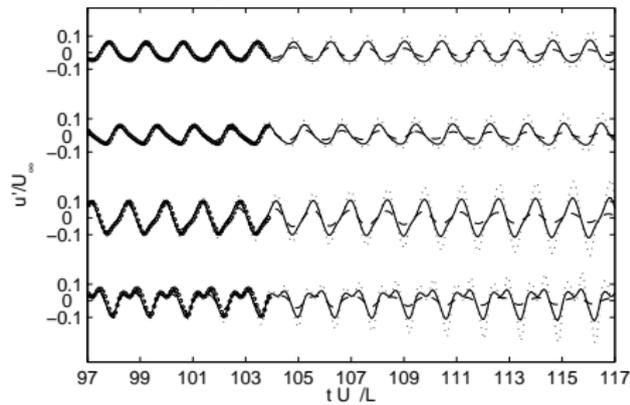
(—) : $\nu_t = 0.73\nu_\infty$;

(·····) : $\nu_t/2$;

(---) : $2\nu_t$;

(●●) : DNS

modèle complet



(—) : $\nu_t = 0.8\nu_\infty$;

(·····) : $\nu_t/2$;

(---) : $2\nu_t$;

(●●) : DNS

↔ une procédure *ad hoc* est nécessaire pour déterminer ν_t

↔ même résultat pour une viscosité spectrale

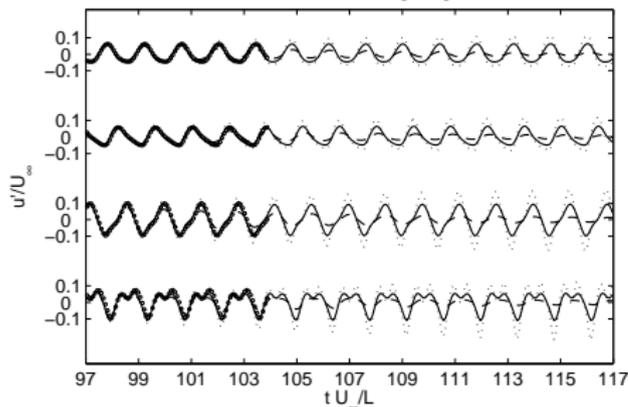
Stabilisation des modèles POD/Galerkine

Utilisation d'une norme dans un espace de Sobolev

nouveau produit scalaire

$$\langle \mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2 \rangle = \int_{\Omega} \left(u_1 u_2 + v_1 v_2 + \frac{2}{\gamma(\gamma-1)} c_1 c_2 \right) dV + \varepsilon \int_{\Omega} \left(\nabla u_1 \nabla u_2 + \nabla v_1 \nabla v_2 + \frac{2}{\gamma(\gamma-1)} \nabla c_1 \nabla c_2 \right) dV$$

modèle isentropique



(—) : $\varepsilon = 5.9 \times 10^{-5}$;
(.....) : $\varepsilon/2$;
(---) : 2ε ;
(●●) : DNS

↪ même effet qu'un terme de viscosité

Le nouveau paramètre ε est similaire à ν_t : $\langle u_i, \Delta u_j \rangle = \int_{\Omega} u_i \Delta u_j dV \sim \int_{\Omega} \nabla u_i \nabla u_j dV$

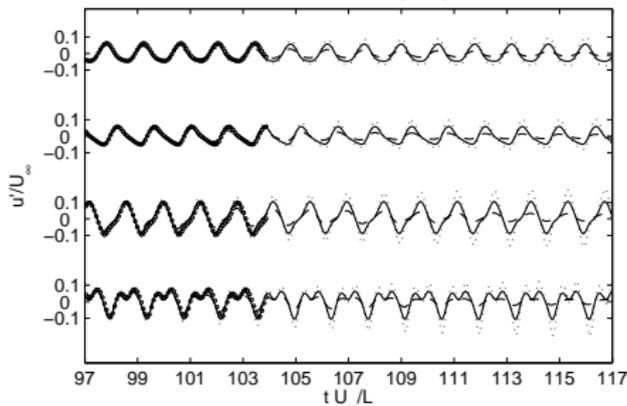
Stabilisation des modèles POD/Galerkine

Utilisation d'un terme de pénalisation

Un terme de pénalisation $G_k(\mathbf{a})$ est introduit sur une frontière :

$$\dot{a}_k = f_k(\mathbf{a}) - G_k(\mathbf{a}) \quad \text{avec} \quad G_k(\mathbf{a}) = \tau \left(\sum_{i=1}^M a_i \int_{\partial\Omega} \phi_k \cdot \phi_i dS - \int_{\partial\Omega} \phi_k \cdot \mathbf{q}_\infty dS \right)$$

modèle isentropique



(—) : $\tau = 17$;
(.....) : $\tau/2$;
(---) : 2τ ;
(●●) : DNS

Stabilisation des modèles POD/Galerkine

Calibration des coefficients (principe)

modèle non calibré : $\dot{a}^g(t) = f^g(a^g(t))$

f^g est le polynôme vectoriel du second degré pour les coefficients a^g .

modèle calibré f^α , qui minimise la fonctionnelle :

$$\mathcal{J}^\alpha = (1 - \alpha)\mathcal{E} + \alpha\mathcal{D}$$

α : paramètre de calibration

$\mathcal{E}(f) = \langle \|e(f, t)\|^2 \rangle / \langle \|e(f^g, t)\|^2 \rangle$: erreur normalisée

$\mathcal{D}(f) = \|f - f^g\|^2 / \|f^g\|^2$: coût lié à l'écart entre f et f^g .

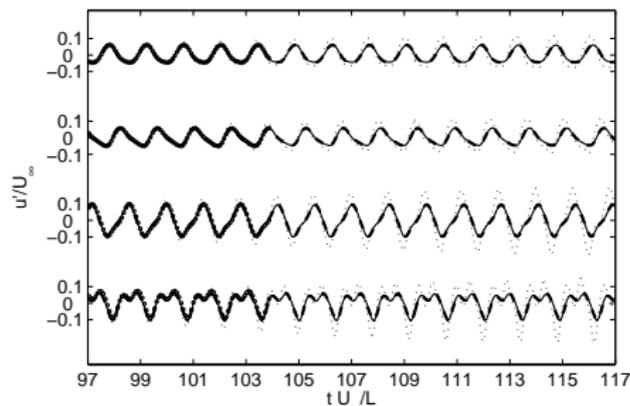
On utilise l'erreur : $e(f, t) = \dot{a}^e(t) - f(a^e(t))$

qui correspond à l'écart entre les dérivées temporelles de $a^e(t)$ issues de la simulation et celles obtenues par résolution du modèle avec le polynôme f .

↪ Comme $e(f, t)$ est une fonction affine, la procédure de calibration revient à résoudre un **système linéaire** (cf. Couplet et al. (JCP 2005)).

Stabilisation des modèles POD/Galerkine

Calibration des coefficients (résultats)



modèle isentropique

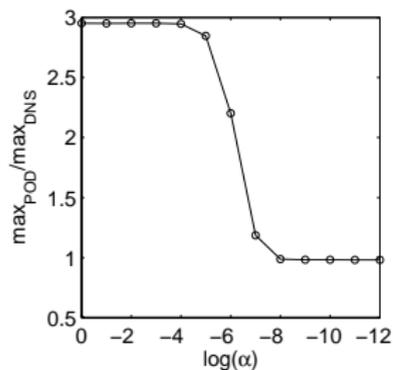
paramètre de calibration

(—) : $\alpha = 10^{-6}$;

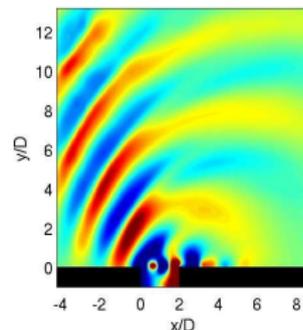
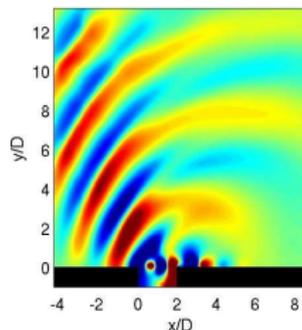
(.....) : $\alpha = 10^{-8}$;

(- - -) : $\alpha = 10^{-10}$;

(●●) : DNS



Champ de pression après 100 000 itérations



DNS

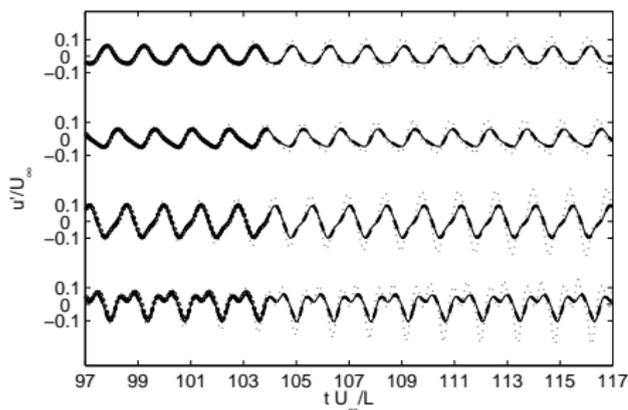
POD ($\alpha = 10^{-8}$)



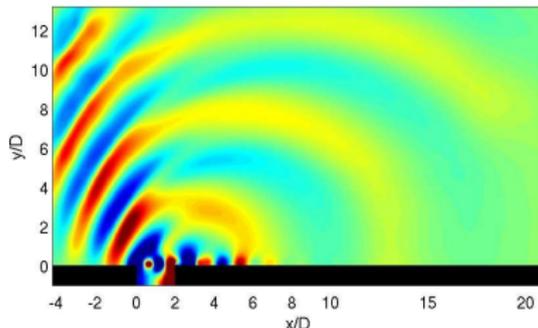
Stabilisation des modèles POD/Galerkine

Agrandissement de la zone de sortie

50 points sont ajoutés avec 4% d'étirement



Champ de pression
après 100 000 itérations



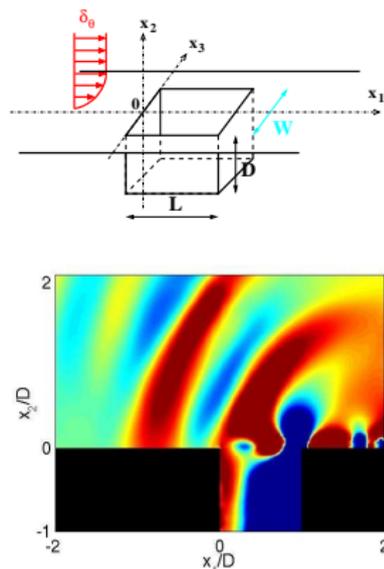
↪ comme l'ont remarqué Noack *et al.* (*JFM* 2005) pour une couche de mélange incompressible, la troncature en aval a une influence sur le terme de pression et peut être responsable d'un manque de dissipation.

● Paramètres physiques :

- Vitesse externe : $M = 0.6$ $U_0 = 215$ m/s
- Dimensions de la cavité : $L/D = 1$
 $Re_D = 28700$
- Envergure : $L/W = 1.28$
- Couche limite incidente: $L/\delta_\theta = 76$

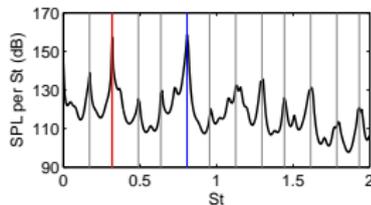
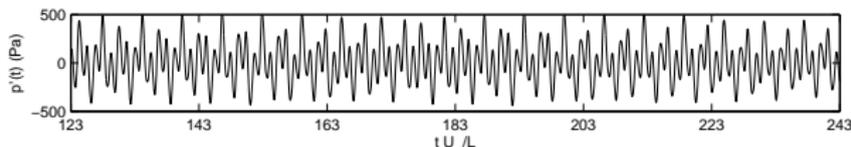
● Paramètres numériques :

- Maillage cartésien non uniforme : $41 \times 33 \times 41$ points dans la cavité
 $121 \times 132 \times 71$ en dehors
- $CFL \simeq 1 \Rightarrow \Delta t = 2.8 \times 10^{-8}$ s
- 82 000 itérations puis stockage des clichés toutes les 20 itérations

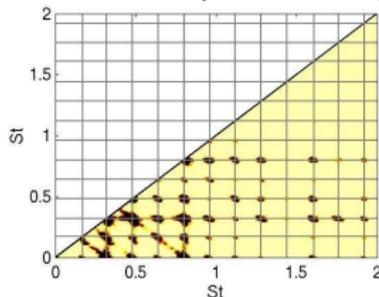


Coexistence de plusieurs fréquences tonales

fluctuations de pression en $(-1.16D, 3D, 0)$



bispectre en $(0, 0.02D, 0)$

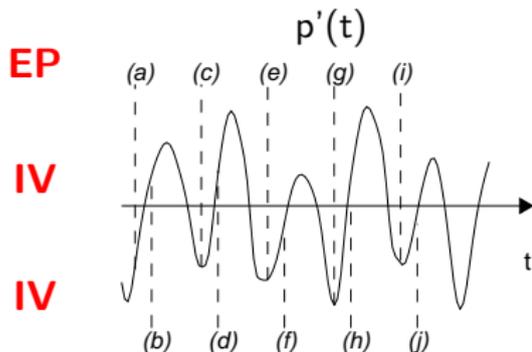
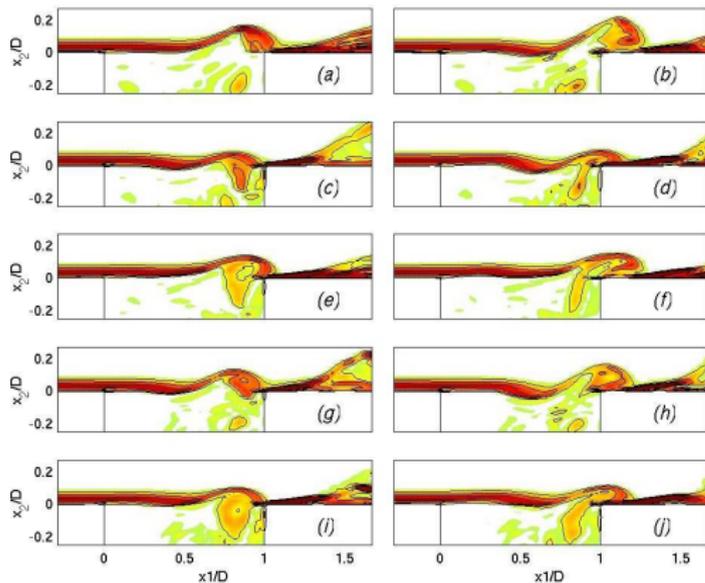


$f_2 - 2f_1$ ($St=0.171$),
 f_1 ($St=0.318$) (mode I),
 $f_2 - f_1$ ($St=0.489$),
 $2f_1$ ($St=0.636$),
 f_2 ($St=0.807$) (mode II),
 $3f_1$ ($St=0.954$),
 $f_1 + f_2$ ($St=1.125$),
 $2f_2 - f_1$ ($St=1.296$),
 $f_2 + 2f_1$ ($St=1.443$),
 $2f_2$ ($St=1.614$),
 $3f_2 - 2f_1$ ($St=1.785$),
 $2f_2 + f_1$ ($St=1.932$)

↪ interactions non linéaires entre les modes

Coexistence de plusieurs fréquences tonales

↪ répétition régulière d'un cycle de 5 oscillations



EP

IV

IV

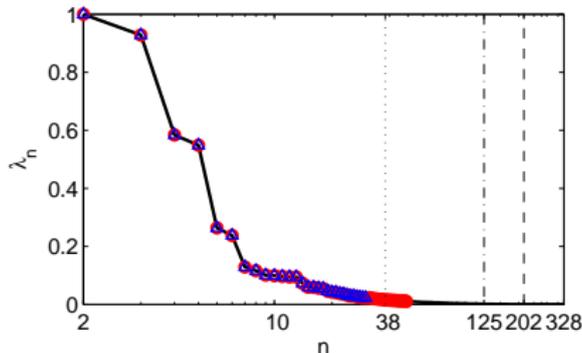
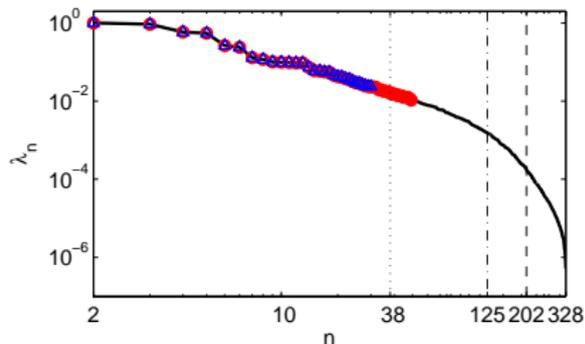
EP

IV

Alternances entre des
Echappements Partiels
et des Impacts Violents

Construction d'un modèle POD/Galerkine

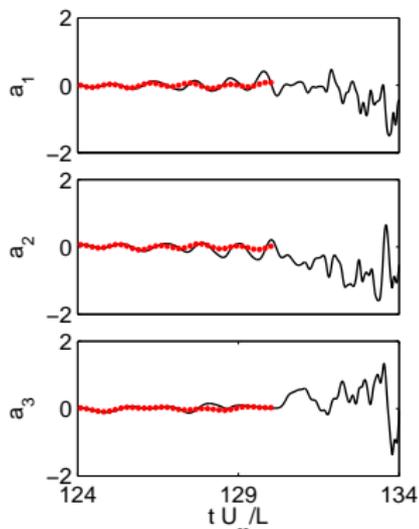
- N =nombre de clichés & M =nombre de modes
 - $M=30$ modes sont retenus à partir de $N=110$ clichés *i.e.* 1 cycle de 5 oscillations ($\triangle\triangle$)
 - $M=50$ modes sont retenus à partir de $N=328$ clichés *i.e.* 5 cycles de 5 oscillations ($-\circ\circ-$)
- λ_n est l'énergie capturée par le mode POD ϕ_n



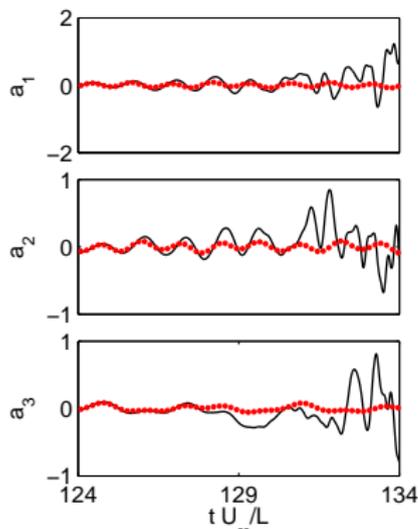
↪ 90% (.....), 99% (-.-.-) et 99.9% (- - -) de l'énergie fluctuante

Modèle isentropique avec la moyenne retranchée

Evolutions des trois premiers coefficients POD a_1 - a_3
pour le modèle **non calibré**



30 modes, 110 clichés

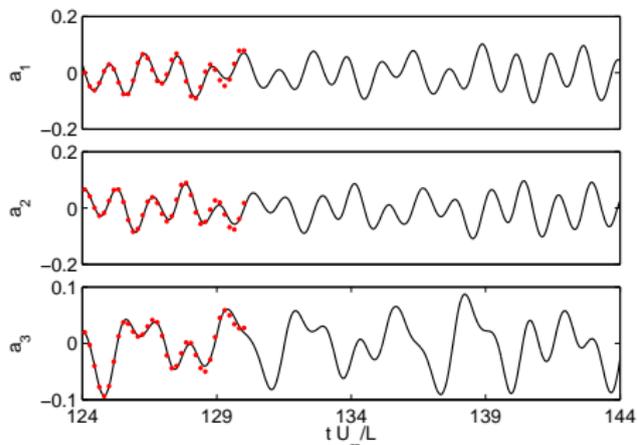


50 modes, 328 clichés

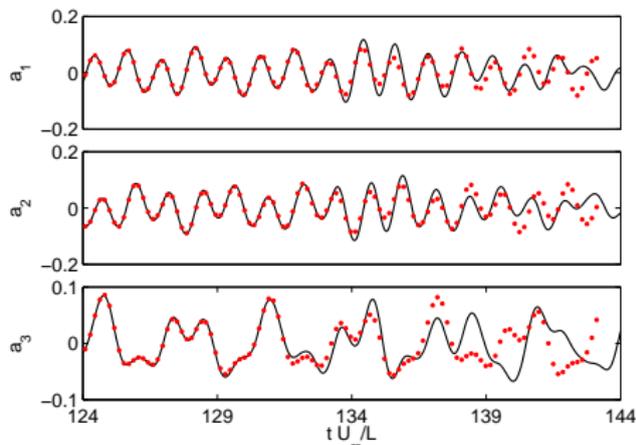
↪ **divergence rapide**

Modèle isentropique avec la moyenne retranchée

Evolutions des trois premiers coefficients POD a_1 - a_3
pour le modèle **calibré** ($\alpha = 10^{-8}$)



30 modes, 110 clichés

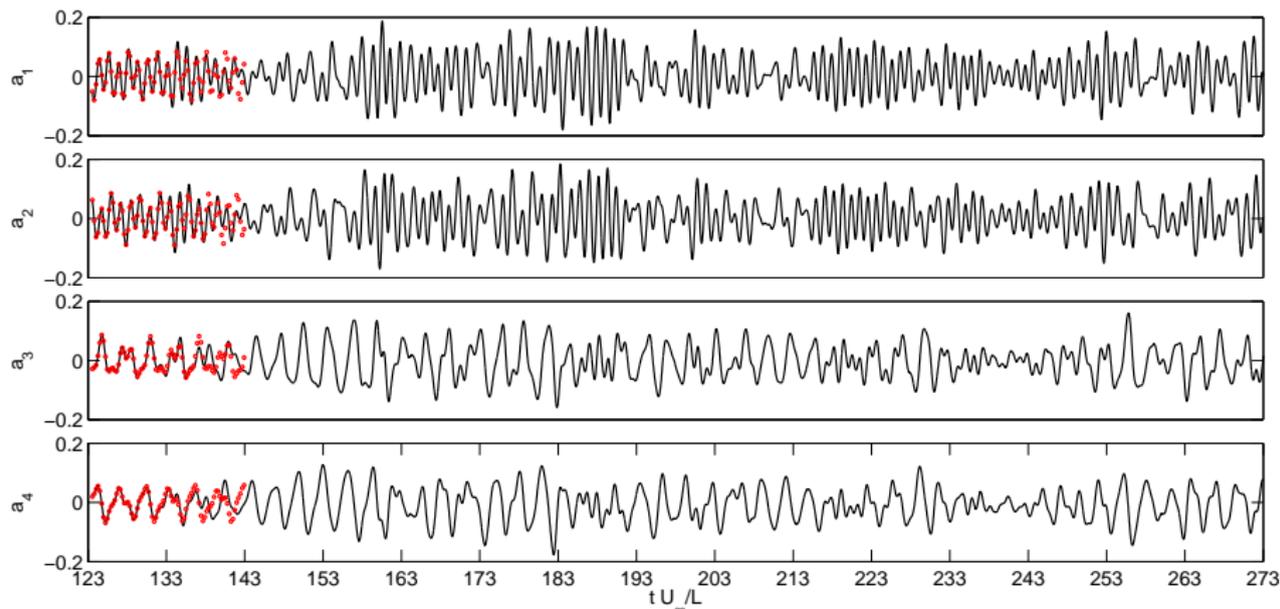


50 modes, 328 clichés

- ↪ **stabilisation efficace**
- ↪ **les cycles de 5 oscillations ne sont pas reproduits**

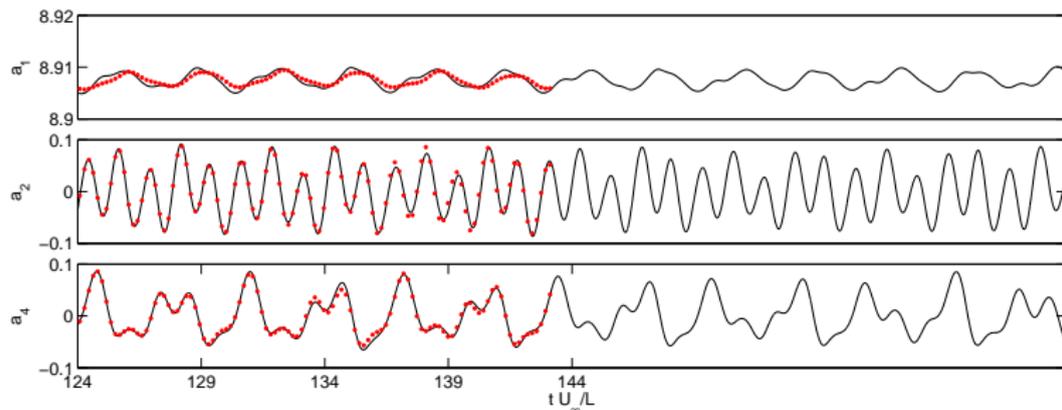
Modèle isentropique avec la moyenne retranchée

Comportement à long terme pour les quatre premiers coefficients
(50 modes, 328 clichés, 50 000 itérations, $\alpha = 10^{-8}$)



prise en compte de la moyenne des clichés dans la base POD

Evolutions des coefficients POD a_1 , a_2 , a_4
pour le modèle **calibré** ($\alpha = 10^{-8}$) avec un terme de pénalisation

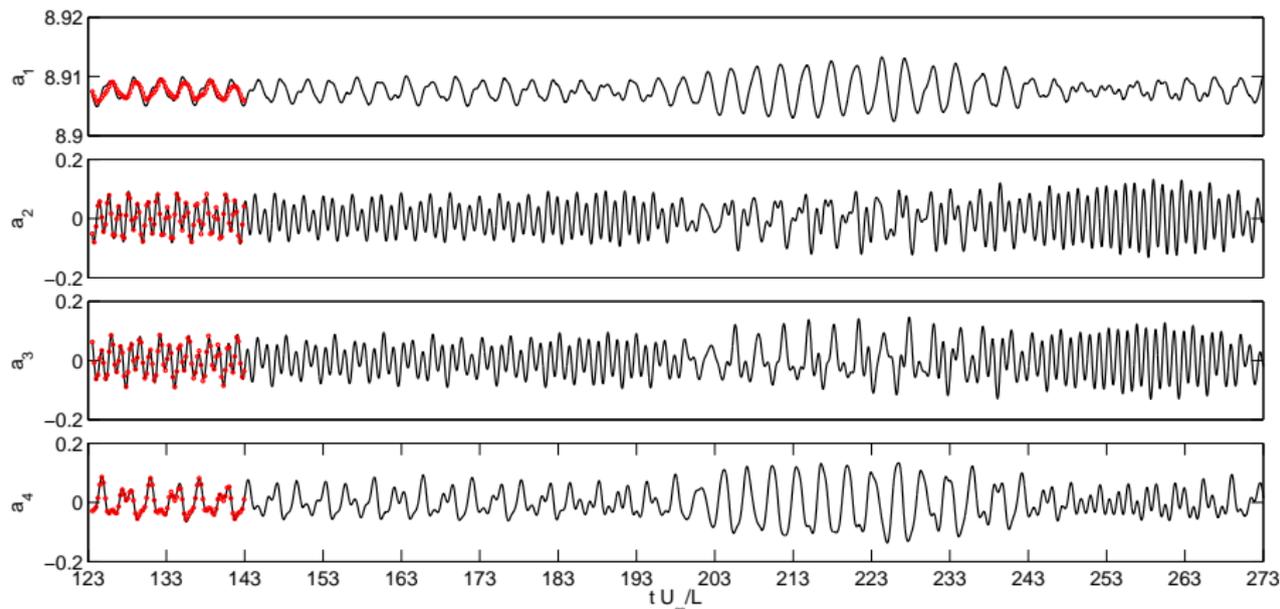


↪ **resultats en bon accord avec la SGE**

Modèle isentropique avec prise en compte de la moyenne

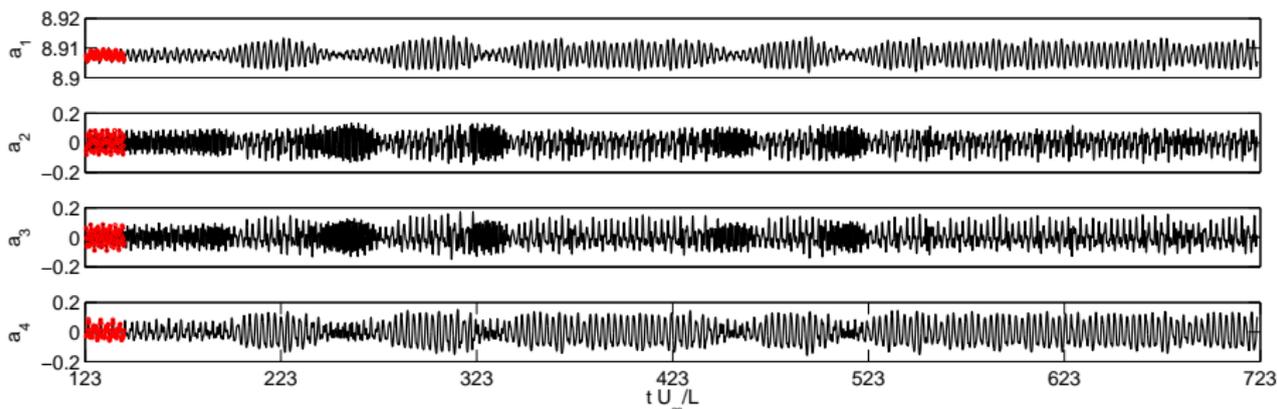
Comportement à long terme pour les quatre premiers coefficients

(49 modes, 328 clichés, 50 000 itérations, $\alpha = 10^{-8}$, terme de pénalisation)



Modèle isentropique avec prise en compte de la moyenne

Comportement à très long terme pour les quatre premiers coefficients (49 modes, 328 clichés, 200 000 itérations, $\alpha = 10^{-8}$, terme de pénalisation)

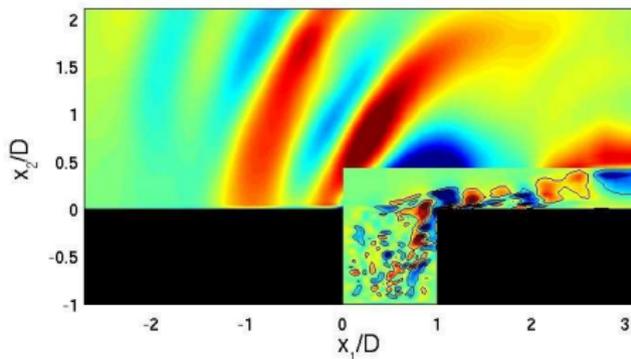
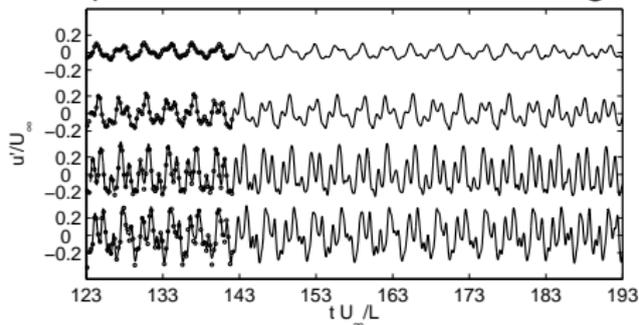


↪ *switching* entre les modes dominants

Reconstruction obtenue avec le modèle isentropique, calibré et avec prise en compte de la moyenne

prise en compte de la moyenne des clichés dans la base POD

4 capteurs dans la couche de mélange



↪ **resultats en bon accord avec la SGE**

↪ **néanmoins le comportement à très long terme n'est pas capable d'entretenir la répétition des cycles de 5 oscillations**