# Projet déposé au CEMRACS 2017

par Frédéric Lagoutière, Nicolas Vauchelet, Thierry Goudon, François Delarue

Ce projet concerne un thème de recherche en mathématiques appliquées en interaction avec la biologie, celui des *équations d'agrégation*. Il s'agit de comprendre, analyser, simuler les phénomènes d'attraction-répulsion au sein de grands groupes d'individus, des populations de bactéries aux bancs de poissons ou aux vols d'oiseaux.
Du point de vue mathématique et analytique, ces phénomènes, modélisés par des équations non linéaires et non locales, sont très complexes et suscitent à l'heure actuelle beaucoup d'intérêt.
Du point de vue de l'analyse numérique : là encore, la non-linéarité, et surtout la non-localité des équations rend très délicate l'élaboration d'algorithmes convergents (fiables).
Du point de vue du calcul scientifique, la gageure est aussi grande, car encore une fois la non-localité des équations rend caduques toutes les méthodes classiques rapides.

## Quelques détails sur le projet scientifique

Les problèmes d'agrégation que nous considérons sont, dans leur forme la plus simple, des problèmes de Cauchy associés à l'équation aux dérivées partielles (EDP)

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial\rho + \nabla \cdot (a\rho) = 0, \\ \text{avec } a = -\nabla W \star \rho, \end{array} \right. \tag{1}$$

où $W$ est un « potentiel » donné $\lambda$-convexe, qui peut ne pas être dérivable. Les premiers résultats d'existence et d'unicité sont dus à Carrillo, DiFrancesco, Figalli, Laurent, Slepčev, [1], et exploitent le fait que la solution est un flot de gradient pour l'énergie $E(\rho) = \int W(x-y)\, d\rho(x)\, d\rho(y)$ dans l'espace de Wasserstein $W_2$. C'est un très joli concept, mais qui n'utilise pas réellement la formulation « équation aux dérivées partielles » écrite ci-dessus (en un certain sens, il s'agit d'une modélisation du problème qui est différente, et c'est un acte de foi a priori de penser que les deux écritures sont équivalentes). Cette formulation du problème, qui s'éloigne des EDP, rend délicate l'utilisation d'outils (très nombreux !) propres aux EDP pour la résolution approchée, numérique.
Dans [2], une autre analyse du problème est proposée, plus proche des EDP et qui fournit elle aussi l'existence et l'unicité d'une solution. Ceci rend disponibles tous les outils classiques de résolution numérique. Dans les articles [3], [5], [4], des algorithmes dissipatifs pour des problèmes de ce type, linéarisés et non linéaires, sont analysés (leur ordre de convergence est au moins 1/2, en distance de Wasserstein).
La mise en œuvre des méthodes a déjà été engagée (en collaboration notamment avec Nicolas Vauchelet (Université Paris 13) et Loïc Gouarin (Université d'Orsay). Voici un résultat numérique obtenu avec l'une de ces méthodes (le schéma « upwind »). La figure 1 montre, en dimension 1, la solution obtenue, au cours du temps. On y observe le phénomène qui est la principale cause de difficulté de traitement mathématique et numérique de l'équation (avec potentiel $W$ non régulier) : l'apparition de masses de Dirac dans la solution, même si la donnée initiale est très régulière. La masse (de bactéries, par exemple) se concentre au cours du temps.

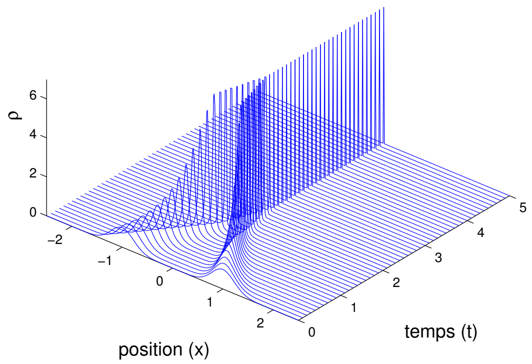


FIGURE 1 – Résolution numérique de l'équation en dimension 1, avec $W(x) = \frac{1}{2}|x| + \frac{1}{4}|x - 0.5| + \frac{1}{4}|x + 0.5|$ et avec une donnée initiale composée de deux gaussiennes.

Parmi les problèmes intéressants et auxquels on pourra s'intéresser lors du CEMRACS, on peut citer :

— l'exploration numérique de l'ordre de convergence, sur des maillages cartésiens ou non, avec des potentiels réguliers ou non (ceci devra donc intégrer une manière de calculer une distance de Wasserstein de manière efficace) ; en particulier, il paraît intéressant d'explorer le phénomène de super-convergence, à l'ordre 1 au lieu de 1/2, pour certains potentiel non réguliers ;

— le développement d'un algorithme d'ordre deux ou plus, au moins sur maillage cartésien ;

— l'ajout de termes de diffusion à l'équation, pour obtenir une équation de type Keller-Segel, pour laquelle on constate aussi ces phénomènes de concentration qui rendent délicates l'analyse et l'analyse numérique...

# Références

[1] J. A. Carrillo, M. DiFrancesco, A. Figalli, T. Laurent, D. Slepčev, *Global-in-time weak measure solutions and finite-time aggregation for nonlocal interaction equations*, Duke Math. J. **156** (2011), 229–271.

[2] J.A. Carrillo, F. James, F. Lagoutière, N. Vauchelet, *The Filippov characteristic flow for the aggregation equation with mildly singular potentials*, J. Differential Equations. **260** (2016) no 1, 304–338.

[3] F. Delarue, F. Lagoutière, N. Vauchelet, *Convergence order of upwind type schemes for transport equations with discontinuous coefficients*, à paraître à JMPA.

[4] F. Delarue, F. Lagoutière, N. Vauchelet, *Convergence analysis of upwind type schemes for the aggregation equation with pointy potential*, en cours de finalisation.

[5] F. Lagoutière, N. Vauchelet, *Analysis and simulation of nonlinear and nonlocal transport equations*, à paraître à Springer INDAM proceedings.