

# REDUCES BASIS METHODS,

Approximation of PDE's, Interpolation and A Posteriori Estimate

Y. Maday<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Jacques-Louis Lions  
Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, Paris, France  
Division of Applied Maths, Brown University, RI, USA

CEMRACS : 20 YEARS LATER !

- 1 Motivation
  - Cadre de l'approche
  - Un exemple
- 2 De l'idée à la mise en œuvre
  - Mise en œuvre en boîte noire
  - Estimateurs d'erreur
  - Sélection des paramètres de bases réduites
- 3 EIM
  - Motivation
  - Approximation in a space of small  $n$ -width
- 4 Definition of the empirical interpolation procedure
  - The magic points
  - Rapid evaluation of matrices and nonlinear contributions
- 5 Reduced element method
  - Motivation
  - Application to fluid flows

- Considérons une classe de problèmes dépendant de paramètres :

$$\mathcal{F}(u, \mu) = 0 \quad (1)$$

où les paramètres  $\mu$  appartiennent à  $R^d$  (ou un pavé de  $R^d$ )

- C'est par exemple le cas pour un problème de dimensionnement où des paramètres doivent être optimisés
- Ce peut également être le cas pour un problème d'identification de paramètre : problème inverse.
- La solution  $u = u(\mu)$  de (1) est cherchée dans  $X$  pour tout  $\mu$
- La dépendance en  $\mu$  de la solution  $u(\mu)$  est le plus souvent régulière.

- Considérons une classe de problèmes dépendant de paramètres :

$$\mathcal{F}(u, \mu) = 0 \quad (1)$$

où les paramètres  $\mu$  appartiennent à  $R^d$  (ou un pavé de  $R^d$ )

- C'est par exemple le cas pour un problème de dimensionnement où des paramètres doivent être optimisés
- Ce peut également être le cas pour un problème d'identification de paramètre : problème inverse.
- La solution  $u = u(\mu)$  de (1) est cherchée dans  $X$  pour tout  $\mu$
- La dépendance en  $\mu$  de la solution  $u(\mu)$  est le plus souvent régulière.

- Considérons une classe de problèmes dépendant de paramètres :

$$\mathcal{F}(u, \mu) = 0 \quad (1)$$

où les paramètres  $\mu$  appartiennent à  $R^d$  (ou un pavé de  $R^d$ )

- C'est par exemple le cas pour un problème de dimensionnement où des paramètres doivent être optimisés
- Ce peut également être le cas pour un problème d'identification de paramètre : problème inverse.
- La solution  $u = u(\mu)$  de (1) est cherchée dans  $X$  pour tout  $\mu$
- La dépendance en  $\mu$  de la solution  $u(\mu)$  est le plus souvent régulière.

- Considérons une classe de problèmes dépendant de paramètres :

$$\mathcal{F}(u, \mu) = 0 \quad (1)$$

où les paramètres  $\mu$  appartiennent à  $R^d$  (ou un pavé de  $R^d$ )

- C'est par exemple le cas pour un problème de dimensionnement où des paramètres doivent être optimisés
- Ce peut également être le cas pour un problème d'identification de paramètre : problème inverse.
- La solution  $u = u(\mu)$  de (1) est cherchée dans  $X$  pour tout  $\mu$
- La dépendance en  $\mu$  de la solution  $u(\mu)$  est le plus souvent régulière.

- Considérons une classe de problèmes dépendant de paramètres :

$$\mathcal{F}(u, \mu) = 0 \quad (1)$$

où les paramètres  $\mu$  appartiennent à  $R^d$  (ou un pavé de  $R^d$ )

- C'est par exemple le cas pour un problème de dimensionnement où des paramètres doivent être optimisés
- Ce peut également être le cas pour un problème d'identification de paramètre : problème inverse.
- La solution  $u = u(\mu)$  de (1) est cherchée dans  $X$  pour tout  $\mu$
- La dépendance en  $\mu$  de la solution  $u(\mu)$  est le plus souvent régulière.

- Considérons une classe de problèmes dépendant de paramètres :

$$\mathcal{F}(u, \mu) = 0 \quad (1)$$

où les paramètres  $\mu$  appartiennent à  $R^d$  (ou un pavé de  $R^d$ )

- C'est par exemple le cas pour un problème de dimensionnement où des paramètres doivent être optimisés
- Ce peut également être le cas pour un problème d'identification de paramètre : problème inverse.
- La solution  $u = u(\mu)$  de (1) est cherchée dans  $X$  pour tout  $\mu$
- La dépendance en  $\mu$  de la solution  $u(\mu)$  est le plus souvent régulière.





Une aiguille dans une botte de foin performance of SVEN  
SACHSALBER



Une aiguille dans une botte de foin performance of SVEN  
SACHSALBER



Une aiguille dans une botte de foin performance of SVEN  
SACHSALBER



ou dans un pique aiguille

Au niveau mathématique, cela se traduit par :

- chercher la solution dans un espace de Banach (e.g.  $L^2$  or  $H^1$ ) de fonctions suffisamment régulières : et qui conduit à une méthode d'éléments finis ou spectrales
- où chercher la solution dans une partie de type variété (noté  $\mathcal{S}$ ) : réduction de complexité

Le bon outil est l'épaisseur de Kolmogorov.

Au niveau mathématique, cela se traduit par :

- chercher la solution dans un espace de Banach (e.g.  $L^2$  or  $H^1$ ) de fonctions suffisamment régulières : et qui conduit à une méthode d'éléments finis ou spectrales
- où chercher la solution dans une partie de type variété (noté  $\mathcal{S}$ ) : réduction de complexité

Le bon outil est l'épaisseur de Kolmogorov.

Au niveau mathématique, cela se traduit par :

- chercher la solution dans un espace de Banach (e.g.  $L^2$  or  $H^1$ ) de fonctions suffisamment régulières : et qui conduit à une méthode d'éléments finis ou spectrales
- où chercher la solution dans une partie de type variété (noté  $\mathcal{S}$ ) : réduction de complexité

Le bon outil est l'épaisseur de Kolmogorov.

Au niveau mathématique, cela se traduit par :

- chercher la solution dans un espace de Banach (e.g.  $L^2$  or  $H^1$ ) de fonctions suffisamment régulières : et qui conduit à une méthode d'éléments finis ou spectrales
- où chercher la solution dans une partie de type variété (noté  $\mathcal{S}$ ) :  
réduction de complexité

Le bon outil est l'épaisseur de Kolmogorov.



Au niveau mathématique, cela se traduit par :

- chercher la solution dans un espace de Banach (e.g.  $L^2$  or  $H^1$ ) de fonctions suffisamment régulières : et qui conduit à une méthode d'éléments finis ou spectrales
- où chercher la solution dans une partie de type variété (noté  $\mathcal{S}$ ) : réduction de complexité

Le bon outil est l'épaisseur de Kolmogorov.

Au niveau mathématique, cela se traduit par :

- chercher la solution dans un espace de Banach (e.g.  $L^2$  or  $H^1$ ) de fonctions suffisamment régulières : et qui conduit à une méthode d'éléments finis ou spectrales
- où chercher la solution dans une partie de type variété (noté  $\mathcal{S}$ ) : réduction de complexité

Le bon outil est l'épaisseur de Kolmogorov.

# Réduction de complexité

## Kolmogorov $n$ -width

### Definition

Let  $X$  be a normed linear space,  $\mathcal{S}$  be a subset of  $X$  and  $X_n$  be a generic  $n$ -dimensional subspace of  $X$ . The deviation of  $\mathcal{S}$  from  $X_n$  is

$$E(\mathcal{S}; X_n) = \sup_{u \in \mathcal{S}} \inf_{v_n \in X_n} \|u - v_n\|_X.$$

The *Kolmogorov  $n$ -width* of  $\mathcal{S}$  in  $X$  is given by

$$\begin{aligned} d_n(\mathcal{S}, X) &= \inf\{E(\mathcal{S}; X_n) : X_n \text{ an } n\text{-dimensional subspace of } X\} \\ &= \inf_{X_n} \sup_{u \in \mathcal{S}} \inf_{v_n \in X_n} \|u - v_n\|_X. \end{aligned} \quad (1)$$

The  $n$ -width of  $\mathcal{S}$  thus measures the extent to which  $\mathcal{S}$  may be approximated by a  $n$ -dimensional subspace of  $X$ .

### Definition

Let  $X$  be a normed linear space,  $\mathcal{S}$  be a subset of  $X$  and  $X_n$  be a generic  $n$ -dimensional subspace of  $X$ . The deviation of  $\mathcal{S}$  from  $X_n$  is

$$E(\mathcal{S}; X_n) = \sup_{u \in \mathcal{S}} \inf_{v_n \in X_n} \|u - v_n\|_X.$$

The *Kolmogorov  $n$ -width* of  $\mathcal{S}$  in  $X$  is given by

$$\begin{aligned} d_n(\mathcal{S}, X) &= \inf\{E(\mathcal{S}; X_n) : X_n \text{ an } n\text{-dimensional subspace of } X\} \\ &= \inf_{X_n} \sup_{u \in \mathcal{S}} \inf_{v_n \in X_n} \|u - v_n\|_X. \end{aligned} \quad (1)$$

The  $n$ -width of  $\mathcal{S}$  thus measures the extent to which  $\mathcal{S}$  may be approximated by a  $n$ -dimensional subspace of  $X$ .

# Haystack or cushion ?

We are interested in the approximation of unknown functions (depending on  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ ) that belong to some manifold  $\mathcal{S}$ .

It consists in functions that depend on a parameter : say  $\mu \in \mathcal{D}$ .

Hence  $\mathcal{S} = \{u(\cdot, \mu), \mu \in \mathcal{D}\}$  ... we further assume that  $\mathcal{S}$  has a small Kolmogorov  $n$ -width.

# Haystack or cushion ?

We are interested in the approximation of unknown functions (depending on  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ ) that belong to some manifold  $\mathcal{S}$ .

It consists in functions that depend on a parameter : say  $\mu \in \mathcal{D}$ .

Hence  $\mathcal{S} = \{u(\cdot, \mu), \mu \in \mathcal{D}\}$  ... we further assume that  $\mathcal{S}$  has a small Kolmogorov  $n$ -width.

# Haystack or cushion ?

We are interested in the approximation of unknown functions (depending on  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ ) that belong to some manifold  $\mathcal{S}$ .

It consists in functions that depend on a parameter : say  $\mu \in \mathcal{D}$ .

Hence  $\mathcal{S} = \{u(\cdot, \mu), \mu \in \mathcal{D}\}$  ... we further assume that  $\mathcal{S}$  has a small Kolmogorov  $n$ -width.

# Why should $\mathcal{S}$ have a small Kolmogorov width ?

Intuition

Verification

Mathematical Analysis



# Why should $\mathcal{S}$ have a small Kolmogorov width ?

Intuition

Verification

Mathematical Analysis

# Why should $\mathcal{S}$ have a small Kolmogorov width ?

Intuition

Verification

Mathematical Analysis

# Why should $\mathcal{S}$ have a small Kolmogorov width ?

Intuition

Verification

Mathematical Analysis

# Why should $\mathcal{S}$ have a small Kolmogorov width ?

Mathematical Analysis

Until recently there was very few analysis on this matter <sup>1</sup> ...

Kolmogorov widths under holomorphic mappings by Albert Cohen and Ronald DeVore, IMA Journal of Numerical Analysis (2016) 36, 1-12

---

<sup>1</sup>Y. Maday, A.Patera, and G. Turinici. A priori convergence theory for reduced-basis approximations of single-parameter elliptic partial differential equations Journal of Scientific Computing 17, 437-446, 2002.

# Why should $\mathcal{S}$ have a small Kolmogorov width ?

Mathematical Analysis

Until recently there was very few analysis on this matter <sup>1</sup> . . .

Kolmogorov widths under holomorphic mappings by Albert Cohen and Ronald DeVore, IMA Journal of Numerical Analysis (2016) 36, 1Ð12

---

<sup>1</sup>Y. Maday, A.Patera, and G. Turinici. A priori convergence theory for reduced-basis approximations of single-parameter elliptic partial differential equations Journal of Scientific Computing 17, 437-446, 2002.

# Why should $\mathcal{S}$ have a small Kolmogorov width ?

## Mathematical Analysis

Simple fact : if  $L$  is a bounded linear operator mapping the Banach space  $X$  into the Banach space  $Y$  and  $\mathcal{D}$  is a compact set in  $X$ , then the Kolmogorov widths of the image  $L(\mathcal{D})$  do not exceed those of  $\mathcal{D}$  multiplied by the norm of  $L$ .

More involved statement : Cohen and DeVore have extended this result from linear maps to holomorphic mappings  $\mathcal{L}$  from  $X$  to  $Y$  in the following sense:

when the  $n$ -widths of  $\mathcal{D}$  are  $O(n^{-r})$  for some  $r > 1$ , then those of  $\mathcal{L}(\mathcal{D})$  are  $O(n^{-s})$  for any  $s < r - 1$ ,

# Why should $\mathcal{S}$ have a small Kolmogorov width ?

## Mathematical Analysis

Simple fact : if  $L$  is a bounded linear operator mapping the Banach space  $X$  into the Banach space  $Y$  and  $\mathcal{D}$  is a compact set in  $X$ , then the Kolmogorov widths of the image  $L(\mathcal{D})$  do not exceed those of  $\mathcal{D}$  multiplied by the norm of  $L$ .

More involved statement : Cohen and DeVore have extended this result from linear maps to holomorphic mappings  $\mathcal{L}$  from  $X$  to  $Y$  in the following sense:

when the  $n$ -widths of  $\mathcal{D}$  are  $O(n^{-r})$  for some  $r > 1$ , then those of  $\mathcal{L}(\mathcal{D})$  are  $O(n^{-s})$  for any  $s < r - 1$ ,

# Why should $\mathcal{S}$ have a small Kolmogorov width ?

## Mathematical Analysis

Cohen and DeVore : when the  $n$ -widths of  $\mathcal{D}$  are  $O(n^{-r})$  for some  $r > 1$ , then those of  $\mathcal{L}(\mathcal{D})$  are  $O(n^{-s})$  for any  $s < r - 1$ ,

This can be the solution to some parameter dependent (elliptic) PDE, possibly nonlinear  $\dots : \mu \in \mathcal{D}$  with small dimension  
 $\Rightarrow \mathcal{S} = \{u(\cdot, \mu), \mu \in \mathcal{D}\}$  has a small dimension !

but this can also be further applied to the situation e.g. : Assume  $\mathcal{S}$  has a small Kolmogorov width, then :  $\mathcal{S}^3 = \{u^3(\cdot, \mu), \mu \in \mathcal{D}\}$  has also a small Kolmogorov width (and also  $e^{\mathcal{S}} = \{e^{u(\cdot, \mu)}, \mu \in \mathcal{D}\}$ ).



# Why should $\mathcal{S}$ have a small Kolmogorov width ?

## Mathematical Analysis

Cohen and DeVore : when the  $n$ -widths of  $\mathcal{D}$  are  $O(n^{-r})$  for some  $r > 1$ , then those of  $\mathcal{L}(\mathcal{D})$  are  $O(n^{-s})$  for any  $s < r - 1$ ,

This can be the solution to some parameter dependent (elliptic) PDE, possibly nonlinear ... :  $\mu \in \mathcal{D}$  with small dimension  
 $\Rightarrow \mathcal{S} = \{u(\cdot, \mu), \mu \in \mathcal{D}\}$  has a small dimension !

but this can also be further applied to the situation e.g. : Assume  $\mathcal{S}$  has a small Kolmogorov width, then :  $\mathcal{S}^3 = \{u^3(\cdot, \mu), \mu \in \mathcal{D}\}$  has also a small Kolmogorov width (and also  $e^{\mathcal{S}} = \{e^{u(\cdot, \mu)}, \mu \in \mathcal{D}\}$ ).

# Why should $\mathcal{S}$ have a small Kolmogorov width ?

## Mathematical Analysis

Cohen and DeVore : when the  $n$ -widths of  $\mathcal{D}$  are  $O(n^{-r})$  for some  $r > 1$ , then those of  $\mathcal{L}(\mathcal{D})$  are  $O(n^{-s})$  for any  $s < r - 1$ ,

This can be the solution to some parameter dependent (elliptic) PDE, possibly nonlinear  $\dots : \mu \in \mathcal{D}$  with small dimension  
 $\Rightarrow \mathcal{S} = \{u(\cdot, \mu), \mu \in \mathcal{D}\}$  has a small dimension !

but this can also be further applied to the situation e.g. : Assume  $\mathcal{S}$  has a small Kolmogorov width, then :  $\mathcal{S}^3 = \{u^3(\cdot, \mu), \mu \in \mathcal{D}\}$  has also a small Kolmogorov width (and also  $e^{\mathcal{S}} = \{e^{u(\cdot, \mu)}, \mu \in \mathcal{D}\}$ ).

# Why should $\mathcal{S}$ have a small Kolmogorov width ?

## Mathematical Analysis

Cohen and DeVore : when the  $n$ -widths of  $\mathcal{D}$  are  $O(n^{-r})$  for some  $r > 1$ , then those of  $\mathcal{L}(\mathcal{D})$  are  $O(n^{-s})$  for any  $s < r - 1$ ,

This can be the solution to some parameter dependent (elliptic) PDE, possibly nonlinear  $\dots : \mu \in \mathcal{D}$  with small dimension  
 $\Rightarrow \mathcal{S} = \{u(\cdot, \mu), \mu \in \mathcal{D}\}$  has a small dimension !

but this can also be further applied to the situation e.g. : Assume  $\mathcal{S}$  has a small Kolmogorov width, then :  $\mathcal{S}^3 = \{u^3(\cdot, \mu), \mu \in \mathcal{D}\}$  has also a small Kolmogorov width (and also  $e^{\mathcal{S}} = \{e^{u(\cdot, \mu)}, \mu \in \mathcal{D}\}$ ).

# Cadre de l'approche.

## L'espace des bases réduites et l'approximation

$$\mathcal{F}(u, \mu) = 0 \quad (1)$$

- On définit  $X_N = \text{Vect}\{u(\mu_n), n = 1, \dots, N\}$  où les  $\mu_n$  sont bien choisis.
- La solution de (1) pour différentes valeurs de  $\mu$  est cherchée par une approximation de Galerkin.  
La convergence notée est exponentielle en  $N$  et une **répartition log aléatoire** des valeurs  $\mu_n$  est souvent meilleure que d'autres choix plus "classiques".
- L'approximation de Galerkin choisit automatiquement une solution qui est (à une constante près) asymptotiquement optimale.
  - Almroth B.O., Stern P., Brogan F.A.(1978)
  - Noor A.K., Peters J.M.(1980)
- **Donc la solution est (à une constante près) aussi bonne que n'importe quelle interpolation ou extrapolation.**

# Cadre de l'approche.

## L'espace des bases réduites et l'approximation

$$\mathcal{F}(u, \mu) = 0 \quad (1)$$

- On définit  $X_N = \text{Vect}\{u(\mu_n), n = 1, \dots, N\}$  où les  $\mu_n$  sont bien choisis.
- La solution de (1) pour différentes valeurs de  $\mu$  est cherchée par une approximation de Galerkin.  
La convergence notée est exponentielle en  $N$  et une **répartition log aléatoire** des valeurs  $\mu_n$  est souvent meilleure que d'autres choix plus "classiques".
- L'approximation de Galerkin choisit automatiquement une solution qui est (à une constante près) asymptotiquement optimale.
  - Almroth B.O., Stern P., Brogan F.A.(1978)
  - Noor A.K., Peters J.M.(1980)
- **Donc la solution est (à une constante près) aussi bonne que n'importe quelle interpolation ou extrapolation.**

# Cadre de l'approche.

## L'espace des bases réduites et l'approximation

$$\mathcal{F}(u, \mu) = 0 \quad (1)$$

- On définit  $X_N = \text{Vect}\{u(\mu_n), n = 1, \dots, N\}$  où les  $\mu_n$  sont bien choisis.
- La solution de (1) pour différentes valeurs de  $\mu$  est cherchée par une approximation de Galerkin.  
La convergence notée est exponentielle en  $N$  et une **répartition log aléatoire** des valeurs  $\mu_n$  est souvent meilleure que d'autres choix plus "classiques".
- L'approximation de Galerkin choisit automatiquement une solution qui est (à une constante près) asymptotiquement optimale.
  - Almroth B.O., Stern P., Brogan F.A.(1978)
  - Noor A.K., Peters J.M.(1980)
- **Donc la solution est (à une constante près) aussi bonne que n'importe quelle interpolation ou extrapolation.**

# Cadre de l'approche.

## L'espace des bases réduites et l'approximation

$$\mathcal{F}(u, \mu) = 0 \quad (1)$$

- On définit  $X_N = \text{Vect}\{u(\mu_n), n = 1, \dots, N\}$  où les  $\mu_n$  sont bien choisis.
- La solution de (1) pour différentes valeurs de  $\mu$  est cherchée par une approximation de Galerkin.  
La convergence notée est exponentielle en  $N$  et une **répartition log aléatoire** des valeurs  $\mu_n$  est souvent meilleure que d'autres choix plus "classiques".
- L'approximation de Galerkin choisit automatiquement une solution qui est (à une constante près) asymptotiquement optimale.
  - Almroth B.O., Stern P., Brogan F.A.(1978)
  - Noor A.K., Peters J.M.(1980)
- **Donc la solution est (à une constante près) aussi bonne que n'importe quelle interpolation ou extrapolation.**

# Cadre de l'approche.

## L'espace des bases réduites et l'approximation

$$\mathcal{F}(u, \mu) = 0 \quad (1)$$

- On définit  $X_N = \text{Vect}\{u(\mu_n), n = 1, \dots, N\}$  où les  $\mu_n$  sont bien choisis.
- La solution de (1) pour différentes valeurs de  $\mu$  est cherchée par une approximation de Galerkin.  
La convergence notée est exponentielle en  $N$  et une **répartition log aléatoire** des valeurs  $\mu_n$  est souvent meilleure que d'autres choix plus “classiques”.
- L'approximation de Galerkin choisit automatiquement une solution qui est (à une constante près) asymptotiquement optimale.
  - Almroth B.O., Stern P., Brogan F.A.(1978)
  - Noor A.K., Peters J.M.(1980)
- **Donc la solution est (à une constante près) aussi bonne que n'importe quelle interpolation ou extrapolation.**



# Cadre de l'approche.

## L'espace des bases réduites et l'approximation

$$\mathcal{F}(u, \mu) = 0 \quad (1)$$

- On définit  $X_N = \text{Vect}\{u(\mu_n), n = 1, \dots, N\}$  où les  $\mu_n$  sont bien choisis.
- La solution de (1) pour différentes valeurs de  $\mu$  est cherchée par une approximation de Galerkin.  
La convergence notée est exponentielle en  $N$  et une **répartition log aléatoire** des valeurs  $\mu_n$  est souvent meilleure que d'autres choix plus "classiques".
- L'approximation de Galerkin choisit automatiquement une solution qui est (à une constante près) asymptotiquement optimale.
  - Almroth B.O., Stern P., Brogan F.A.(1978)
  - Noor A.K., Peters J.M.(1980)
- **Donc la solution est (à une constante près) aussi bonne que n'importe quelle interpolation ou extrapolation.**

# Cadre de l'approche.

## L'espace des bases réduites et l'approximation

$$\mathcal{F}(u, \mu) = 0 \quad (1)$$

- On définit  $X_N = \text{Vect}\{u(\mu_n), n = 1, \dots, N\}$  où les  $\mu_n$  sont bien choisis.
- La solution de (1) pour différentes valeurs de  $\mu$  est cherchée par une approximation de Galerkin.  
La convergence notée est exponentielle en  $N$  et une **répartition log aléatoire** des valeurs  $\mu_n$  est souvent meilleure que d'autres choix plus "classiques".
- L'approximation de Galerkin choisit automatiquement une solution qui est (à une constante près) asymptotiquement optimale.
  - Almroth B.O., Stern P., Brogan F.A.(1978)
  - Noor A.K., Peters J.M.(1980)
- **Donc la solution est (à une constante près) aussi bonne que n'importe quelle interpolation ou extrapolation.**

## 1 Motivation

- Cadre de l'approche
- **Un exemple**

## 2 De l'idée à la mise en œuvre

- Mise en œuvre en boîte noire
- Estimateurs d'erreur
- Sélection des paramètres de bases réduites

## 3 EIM

- Motivation
- Approximation in a space of small  $n$ -width

## 4 Definition of the empirical interpolation procedure

- The magic points
- Rapid evaluation of matrices and nonlinear contributions

## 5 Reduced element method

- Motivation
- Application to fluid flows

Problème d'ailette de radiateur

$$a(u, v; \mu) := \int_{\Omega} k \nabla u \nabla v + \text{Bi} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1} uv = \int_{\Gamma_1} v$$

Les paramètres sont :

Problème d'ailette de radiateur

$$a(u, v; \mu) := \int_{\Omega} k \nabla u \nabla v + \text{Bi} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1} uv = \int_{\Gamma_1} v$$

Les paramètres sont :

Problème d'ailette de radiateur

$$a(u, v; \mu) := \int_{\Omega} k \nabla u \nabla v + \text{Bi} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1} uv = \int_{\Gamma_1} v$$

Les paramètres sont :

# Un exemple

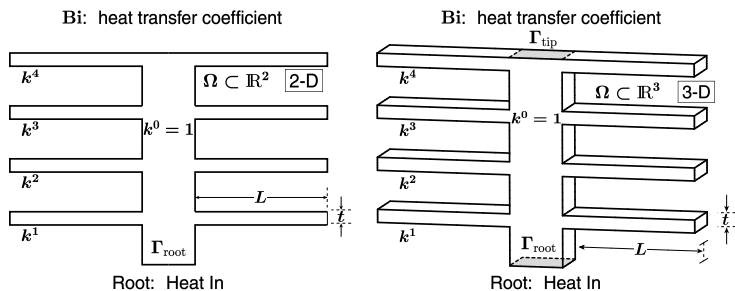


Figure: the fin geometry.

Problème d'ailette de radiateur

$$a(u, v; \mu) := \int_{\Omega} k \nabla u \nabla v + \text{Bi} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1} uv = \int_{\Gamma_1} v$$

Les paramètres sont :

- les conductivités  $k_i, i = 1, \dots, 4$
- les dimensions  $L$  et  $t$
- le nombre de Biot  $Bi$
- L'espace de conception est  $\mathcal{D} = [0.1, 10]^4 \times [0.01, 1] \times [2, 3] \times [0.1, 0.5]$



Problème d'ailette de radiateur

$$a(u, v; \mu) := \int_{\Omega} k \nabla u \nabla v + \text{Bi} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1} uv = \int_{\Gamma_1} v$$

Les paramètres sont :

- les conductivités  $k_i, i = 1, \dots, 4$
- les dimensions  $L$  et  $t$
- le nombre de Biot  $Bi$
- L'espace de conception est  
 $\mathcal{D} = [0.1, 10]^4 \times [0.01, 1] \times [2, 3] \times [0.1, 0.5]$

Problème d'ailette de radiateur

$$a(u, v; \mu) := \int_{\Omega} k \nabla u \nabla v + \text{Bi} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1} uv = \int_{\Gamma_1} v$$

Les paramètres sont :

- les conductivités  $k_i, i = 1, \dots, 4$
- les dimensions  $L$  et  $t$
- le nombre de Biot  $Bi$
- L'espace de conception est  
 $\mathcal{D} = [0.1, 10]^4 \times [0.01, 1] \times [2, 3] \times [0.1, 0.5]$

Problème d'ailette de radiateur

$$a(u, v; \mu) := \int_{\Omega} k \nabla u \nabla v + \text{Bi} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1} uv = \int_{\Gamma_1} v$$

Les paramètres sont :

- les conductivités  $k_i, i = 1, \dots, 4$
- les dimensions  $L$  et  $t$
- le nombre de Biot  $Bi$
- L'espace de conception est  
 $\mathcal{D} = [0.1, 10]^4 \times [0.01, 1] \times [2, 3] \times [0.1, 0.5]$

Problème d'ailette de radiateur

$$a(u, v; \mu) := \int_{\Omega} k \nabla u \nabla v + \text{Bi} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1} uv = \int_{\Gamma_1} v$$

Les paramètres sont :

- les conductivités  $k_i, i = 1, \dots, 4$
- les dimensions  $L$  et  $t$
- le nombre de Biot  $Bi$
- L'espace de conception est  $\mathcal{D} = [0.1, 10]^4 \times [0.01, 1] \times [2, 3] \times [0.1, 0.5]$

# Un exemple

... et son approximation

On choisit au hasard  $N$  points dans l'espace de conception  $\mathcal{D}$  et on approche les solutions pour ce jeu de paramètre par une méthode d'éléments finis (par exemple).

La méthode de bases réduites est alors mise en œuvre à partir de ces solutions et la température moyenne au pied du radiateur est notée

$N$	10	20	30	40	50
Erreur	$1.6 \cdot 10^{-1}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$7.2 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$

Notez qu'avec seulement  $N = 50$  cela fait moins de 2 points par direction de paramètre et que l'on note une convergence exponentielle

Il semble également que la taille de la base réduite  $N$  pour une précision donnée ne semble pas trop dépendre de la dimension, en fait  $N(d) \ll N(1)^d$ !!!

# Un exemple

... et son approximation

On choisit au hasard  $N$  points dans l'espace de conception  $\mathcal{D}$  et on approche les solutions pour ce jeu de paramètre par une méthode d'éléments finis (par exemple).

La méthode de bases réduites est alors mise en œuvre à partir de ces solutions et la température moyenne au pied du radiateur est notée

$N$	10	20	30	40	50
Erreur	$1.6 \cdot 10^{-1}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$7.2 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$

Notez qu'avec seulement  $N = 50$  cela fait moins de 2 points par direction de paramètre et que l'on note une convergence exponentielle

Il semble également que la taille de la base réduite  $N$  pour une précision donnée ne semble pas trop dépendre de la dimension, en fait  $N(d) \ll N(1)^d$ !!!

# Un exemple

... et son approximation

On choisit au hasard  $N$  points dans l'espace de conception  $\mathcal{D}$  et on approche les solutions pour ce jeu de paramètre par une méthode d'éléments finis (par exemple).

La méthode de bases réduites est alors mise en œuvre à partir de ces solutions et la température moyenne au pied du radiateur est notée

$N$	10	20	30	40	50
Erreur	$1.6 \cdot 10^{-1}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$7.2 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-4}$

Notez qu'avec seulement  $N = 50$  cela fait moins de 2 points par direction de paramètre et que l'on note une convergence exponentielle

Il semble également que la taille de la base réduite  $N$  pour une précision donnée ne semble pas trop dépendre de la dimension, en fait  $N(d) \ll N(1)^d$ !!!

# Un exemple

... et son approximation

On choisit au hasard  $N$  points dans l'espace de conception  $\mathcal{D}$  et on approche les solutions pour ce jeu de paramètre par une méthode d'éléments finis (par exemple).

La méthode de bases réduites est alors mise en œuvre à partir de ces solutions et la température moyenne au pied du radiateur est notée

$N$	10	20	30	40	50
Erreur	$1.610^{-1}$	$1.610^{-2}$	$2.410^{-3}$	$7.210^{-4}$	$3.110^{-4}$

Notez qu'avec seulement  $N = 50$  cela fait moins de 2 points par direction de paramètre et que l'on note une convergence exponentielle

Il semble également que la taille de la base réduite  $N$  pour une précision donnée ne semble pas trop dépendre de la dimension, en fait  $N(d) \ll N(1)^d$ !!!



# Un exemple

... et son approximation

On choisit au hasard  $N$  points dans l'espace de conception  $\mathcal{D}$  et on approche les solutions pour ce jeu de paramètre par une méthode d'éléments finis (par exemple).

La méthode de bases réduites est alors mise en œuvre à partir de ces solutions et la température moyenne au pied du radiateur est notée

$N$	10	20	30	40	50
Erreur	$1.610^{-1}$	$1.610^{-2}$	$2.410^{-3}$	$7.210^{-4}$	$3.110^{-4}$

**Notez qu'avec seulement  $N = 50$  cela fait moins de 2 points par direction de paramètre et que l'on note une convergence exponentielle**

Il semble également que la taille de la base réduite  $N$  pour une précision donnée ne semble pas trop dépendre de la dimension, en fait  $N(d) \ll N(1)^d$ !!!

# Un exemple

... et son approximation

On choisit au hasard  $N$  points dans l'espace de conception  $\mathcal{D}$  et on approche les solutions pour ce jeu de paramètre par une méthode d'éléments finis (par exemple).

La méthode de bases réduites est alors mise en œuvre à partir de ces solutions et la température moyenne au pied du radiateur est notée

$N$	10	20	30	40	50
Erreur	$1.610^{-1}$	$1.610^{-2}$	$2.410^{-3}$	$7.210^{-4}$	$3.110^{-4}$

Notez qu'avec seulement  $N = 50$  cela fait moins de 2 points par direction de paramètre et que l'on note une convergence exponentielle

Il semble également que la taille de la base réduite  $N$  pour une précision donnée ne semble pas trop dépendre de la dimension, en fait  $N(d) \ll N(1)^d$ !!!

- 1 Motivation
  - Cadre de l'approche
  - Un exemple
- 2 De l'idée à la mise en œuvre
  - **Mise en œuvre en boîte noire**
  - Estimateurs d'erreur
  - Sélection des paramètres de bases réduites
- 3 EIM
  - Motivation
  - Approximation in a space of small  $n$ -width
- 4 Definition of the empirical interpolation procedure
  - The magic points
  - Rapid evaluation of matrices and nonlinear contributions
- 5 Reduced element method
  - Motivation
  - Application to fluid flows

But : résoudre **très** rapidement des problèmes pour de nouveaux jeux de paramètres.

On accepte un travail **hors ligne** conséquent

mais les calculs **en ligne** doivent être très faibles.

But : résoudre **très** rapidement des problèmes pour de nouveaux jeux de paramètres.

On accepte un travail **hors ligne** conséquent

mais les calculs **en ligne** doivent être très faibles.

But : résoudre **très** rapidement des problèmes pour de nouveaux jeux de paramètres.

On accepte un travail **hors ligne** conséquent

mais les calculs **en ligne** doivent être très faibles.

Il s'agit d'évaluer:

- par exemple la matrice de rigidité  $\mathcal{A}_{i,j} := a(u(\mu_i), u(\mu_j); \mu)$ .

Notez que  $\Omega = \cup \Omega_\ell$  et donc :  $\int_{\Omega} = \sum_{\ell=0}^6 \int_{\Omega_\ell}$

De plus par changement de variable les intégrales sur  $\Omega_\ell$  s'écrivent comme des combinaisons linéaires de  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}$  et  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$

Le problème initial

$$\int_{\Omega} k \nabla u \nabla v + \text{Bi} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1} uv = \int_{\Gamma_1} v$$

s'écrit donc

$$a(u, v; \mu) = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v) = \ell(v)$$

- avec des formes bilinéaires  $a_p$  paramètre indépendantes

Il s'agit d'évaluer:

- par exemple la matrice de rigidité  $\mathcal{A}_{i,j} := a(u(\mu_i), u(\mu_j); \mu)$ .

Notez que  $\Omega = \cup \Omega_\ell$  et donc :  $\int_{\Omega} = \sum_{\ell=0}^6 \int_{\Omega_\ell}$

De plus par changement de variable les intégrales sur  $\Omega_\ell$  s'écrivent comme des combinaisons linéaires de  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}$  et  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$

Le problème initial

$$\int_{\Omega} k \nabla u \nabla v + \text{Bi} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1} uv = \int_{\Gamma_1} v$$

s'écrit donc

$$a(u, v; \mu) = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v) = \ell(v)$$

- avec des formes bilinéaires  $a_p$  paramètre indépendantes



Il s'agit d'évaluer:

- par exemple la matrice de rigidité  $\mathcal{A}_{i,j} := a(u(\mu_i), u(\mu_j); \mu)$ .

Notez que  $\Omega = \cup \Omega_\ell$  et donc :  $\int_{\Omega} = \sum_{\ell=0}^6 \int_{\Omega_\ell}$

De plus par changement de variable les intégrales sur  $\Omega_\ell$  s'écrivent comme des combinaisons linéaires de  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}$  et  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$

Le problème initial

$$\int_{\Omega} k \nabla u \nabla v + \text{Bi} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1} uv = \int_{\Gamma_1} v$$

s'écrit donc

$$a(u, v; \mu) = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v) = \ell(v)$$

- avec des formes bilinéaires  $a_p$  paramètre indépendantes

Il s'agit d'évaluer:

- par exemple la matrice de rigidité  $\mathcal{A}_{i,j} := a(u(\mu_i), u(\mu_j); \mu)$ .

Notez que  $\Omega = \cup \Omega_\ell$  et donc :  $\int_{\Omega} = \sum_{\ell=0}^6 \int_{\Omega_\ell}$

De plus par changement de variable les intégrales sur  $\Omega_\ell$  s'écrivent comme des combinaisons linéaires de  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}$  et  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$

Le problème initial

$$\int_{\Omega} k \nabla u \nabla v + \text{Bi} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1} uv = \int_{\Gamma_1} v$$

s'écrit donc

$$a(u, v; \mu) = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v) = \ell(v)$$

- avec des formes bilinéaires  $a_p$  paramètre indépendantes

Il s'agit d'évaluer:

- par exemple la matrice de rigidité  $\mathcal{A}_{i,j} := a(u(\mu_i), u(\mu_j); \mu)$ .

Notez que  $\Omega = \cup \Omega_\ell$  et donc :  $\int_{\Omega} = \sum_{\ell=0}^6 \int_{\Omega_\ell}$

De plus par changement de variable les intégrales sur  $\Omega_\ell$  s'écrivent comme des combinaisons linéaires de  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}$  et  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$

Le problème initial

$$\int_{\Omega} k \nabla u \nabla v + \text{Bi} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1} uv = \int_{\Gamma_1} v$$

s'écrit donc

$$a(u, v; \mu) = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v) = \ell(v)$$

- avec des formes bilinéaires  $a_p$  paramètre indépendantes

Il s'agit d'évaluer:

- par exemple la matrice de rigidité  $\mathcal{A}_{i,j} := a(u(\mu_i), u(\mu_j); \mu)$ .

Notez que  $\Omega = \cup \Omega_\ell$  et donc :  $\int_{\Omega} = \sum_{\ell=0}^6 \int_{\Omega_\ell}$

De plus par changement de variable les intégrales sur  $\Omega_\ell$  s'écrivent comme des combinaisons linéaires de  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}$  et  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$

Le problème initial

$$\int_{\Omega} k \nabla u \nabla v + \text{Bi} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma_1} uv = \int_{\Gamma_1} v$$

s'écrit donc

$$a(u, v; \mu) = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v) = \ell(v)$$

- avec des formes bilinéaires  $a_p$  **paramètre indépendantes**

# Mise en œuvre en boîte noire

$$\sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v) = \ell(v)$$

La mise en œuvre est alors simplifiée

- **Calcul hors ligne**, les différents  $a_p(\xi_i, \xi_j)$  sont précalculés, ainsi que les  $g_p = a_p(u, u)$  sont les éléments de la base réduite.
- **Calcul en ligne**, le calcul des éléments de la matrice de rigidité se font en seulement  $PN^2$  calculs, au lieu de  $N^2$ , où  $N$  est la dimension de la base des éléments.

$$Au = \sum_{p=1}^P g_p a_p(u, u)$$

- **Calcul en ligne encore** la matrice de rigidité est inversée en  $N^3$  opérations (inversion directe)

ainsi que les calculs hors ligne sont faits une seule fois, et les calculs en ligne sont fait seulement de  $N$ .

# Mise en œuvre en boîte noire

$$\sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v) = \ell(v)$$

La mise en œuvre est alors simplifiée

- **Calcul hors ligne**, les différents  $a_p(\xi_j, \xi_j)$  sont précalculés, ainsi que les  $g_p(\mu)$  pour les éléments de la base réduite.
  - **Calcul en ligne**, le calcul des éléments de la matrice de rigidité se font en seulement  $PN^2$  calculs, au lieu de  $N^3$ , où  $N$  est la dimension de la base des éléments.
- $$K_{\mu} = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) K_p(u)$$
- **Calcul en ligne encore** la matrice de rigidité est inversée en  $N^3$  opérations (inversion directe) ainsi que les produits matriciels sont faits en  $N^3$  opérations au lieu de seulement de  $N^2$ .

# Mise en œuvre en boîte noire

$$\sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v) = \ell(v)$$

La mise en œuvre est alors simplifiée

- **Calcul hors ligne**, les différents  $a_p(\xi_i, \xi_j)$  sont précalculés,  
Les  $\xi_j := u(\mu_j)$  étant les éléments de la base réduite
- **Calcul en ligne**, le calcul des éléments de la matrice de rigidité se font en seulement  $PN^2$  calculs,  
au lieu de  $N^2$ , où  $N$  est la dimension de la base des éléments finis.

$$A_{i,j} = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(\xi_i, \xi_j)$$

- **Calcul en ligne encore** la matrice de rigidité est inversée en  $N^3$  opérations (inversion directe)  
ainsi tous les calculs longs sont faits “**hors ligne**” et les calculs “**en ligne**” dépendent seulement de  $N$

# Mise en œuvre en boîte noire

$$\sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v) = \ell(v)$$

La mise en œuvre est alors simplifiée

- **Calcul hors ligne**, les différents  $a_p(\xi_i, \xi_j)$  sont précalculés, Les  $\xi_j := u(\mu_j)$  étant les éléments de la base réduite
- **Calcul en ligne**, le calcul des éléments de la matrice de rigidité se font en seulement  $PN^2$  calculs, au lieu de  $N^2$ , où  $N$  est la dimension de la base des éléments finis.

$$A_{i,j} = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(\xi_i, \xi_j)$$

- **Calcul en ligne encore** la matrice de rigidité est inversée en  $N^3$  opérations (inversion directe) ainsi tous les calculs longs sont faits “hors ligne” et les calculs “en ligne” dépendent seulement de  $N$



# Mise en œuvre en boîte noire

$$\sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v) = \ell(v)$$

La mise en œuvre est alors simplifiée

- **Calcul hors ligne**, les différents  $a_p(\xi_i, \xi_j)$  sont précalculés, Les  $\xi_j := u(\mu_j)$  étant les éléments de la base réduite
- **Calcul en ligne**, le calcul des éléments de la matrice de rigidité se font en seulement  $PN^2$  calculs, au lieu de  $\mathcal{N}^2$ , où  $\mathcal{N}$  est la dimension de la base des éléments finis.

$$A_{i,j} = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(\xi_i, \xi_j)$$

- **Calcul en ligne encore** la matrice de rigidité est inversée en  $N^3$  opérations (inversion directe) ainsi tous les calculs longs sont faits “hors ligne” et les calculs “en ligne” dépendent seulement de  $N$

# Mise en œuvre en boîte noire

$$\sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v) = \ell(v)$$

La mise en œuvre est alors simplifiée

- **Calcul hors ligne**, les différents  $a_p(\xi_i, \xi_j)$  sont précalculés, Les  $\xi_j := u(\mu_j)$  étant les éléments de la base réduite
- **Calcul en ligne**, le calcul des éléments de la matrice de rigidité se font en seulement  $PN^2$  calculs, au lieu de  $\mathcal{N}^2$ , où  $\mathcal{N}$  est la dimension de la base des éléments finis.

$$A_{i,j} = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(\xi_i, \xi_j)$$

- **Calcul en ligne encore** la matrice de rigidité est inversée en  $N^3$  opérations (inversion directe) ainsi tous les calculs longs sont faits “hors ligne” et les calculs “en ligne” dépendent seulement de  $N$

# Mise en œuvre en boîte noire

$$\sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v) = \ell(v)$$

La mise en œuvre est alors simplifiée

- **Calcul hors ligne**, les différents  $a_p(\xi_i, \xi_j)$  sont précalculés,  
Les  $\xi_j := u(\mu_j)$  étant les éléments de la base réduite
- **Calcul en ligne**, le calcul des éléments de la matrice de rigidité se font en seulement  $PN^2$  calculs,  
au lieu de  $\mathcal{N}^2$ , où  $\mathcal{N}$  est la dimension de la base des éléments finis.

$$A_{i,j} = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(\xi_i, \xi_j)$$

- **Calcul en ligne encore** la matrice de rigidité est inversée en  $N^3$  opérations (inversion directe)  
ainsi tous les calculs longs sont faits “hors ligne” et les calculs “en ligne” dépendent seulement de  $N$

# Mise en œuvre en boîte noire

$$\sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v) = \ell(v)$$

La mise en œuvre est alors simplifiée

- **Calcul hors ligne**, les différents  $a_p(\xi_i, \xi_j)$  sont précalculés, Les  $\xi_j := u(\mu_j)$  étant les éléments de la base réduite
- **Calcul en ligne**, le calcul des éléments de la matrice de rigidité se font en seulement  $PN^2$  calculs, au lieu de  $\mathcal{N}^2$ , où  $\mathcal{N}$  est la dimension de la base des éléments finis.

$$A_{i,j} = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(\xi_i, \xi_j)$$

- **Calcul en ligne encore** la matrice de rigidité est inversée en  $N^3$  opérations (inversion directe) ainsi tous les calculs longs sont faits "hors ligne" et les calculs "en ligne" dépendent seulement de  $N$

# Mise en œuvre en boîte noire

$$\sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v) = \ell(v)$$

La mise en œuvre est alors simplifiée

- **Calcul hors ligne**, les différents  $a_p(\xi_i, \xi_j)$  sont précalculés, Les  $\xi_j := u(\mu_j)$  étant les éléments de la base réduite
- **Calcul en ligne**, le calcul des éléments de la matrice de rigidité se font en seulement  $PN^2$  calculs, au lieu de  $\mathcal{N}^2$ , où  $\mathcal{N}$  est la dimension de la base des éléments finis.

$$A_{i,j} = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(\xi_i, \xi_j)$$

- **Calcul en ligne encore** la matrice de rigidité est inversée en  $N^3$  opérations (inversion directe) ainsi tous les calculs longs sont faits “hors ligne” et les calculs “en ligne” dépendent seulement de  $N$

# Mise en œuvre en boîte noire

$$\sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v) = \ell(v)$$

La mise en œuvre est alors simplifiée

- **Calcul hors ligne**, les différents  $a_p(\xi_i, \xi_j)$  sont précalculés, Les  $\xi_j := u(\mu_j)$  étant les éléments de la base réduite
- **Calcul en ligne**, le calcul des éléments de la matrice de rigidité se font en seulement  $PN^2$  calculs, au lieu de  $\mathcal{N}^2$ , où  $\mathcal{N}$  est la dimension de la base des éléments finis.

$$A_{i,j} = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(\xi_i, \xi_j)$$

- **Calcul en ligne encore** la matrice de rigidité est inversée en  $N^3$  opérations (inversion directe) ainsi tous les calculs longs sont faits “**hors ligne**” et les calculs “**en ligne**” dépendent seulement de  $N$

- 1 Motivation
  - Cadre de l'approche
  - Un exemple
- 2 De l'idée à la mise en œuvre
  - Mise en œuvre en boîte noire
  - **Estimateurs d'erreur**
  - Sélection des paramètres de bases réduites
- 3 EIM
  - Motivation
  - Approximation in a space of small  $n$ -width
- 4 Definition of the empirical interpolation procedure
  - The magic points
  - Rapid evaluation of matrices and nonlinear contributions
- 5 Reduced element method
  - Motivation
  - Application to fluid flows

La plupart du temps, on se contente d'une connaissance partielle de la solution

par exemple, si le problème est sous la forme : trouver  $u \in X$

$$a(u, v; \mu) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in X$$

ce qui interesse est une moyenne de la solution :

- on calcule la sortie (supposée linéaire)  $s = \ell(u)$

On approche donc la solution : find  $u_\delta \in X_\delta$

$$a(u_\delta, v_\delta) = \langle f, v_\delta \rangle, \quad \forall v_\delta \in X_\delta$$

et l'on introduit  $s_\delta = \ell(u_\delta)$



La plupart du temps, on se contente d'une connaissance partielle de la solution

par exemple, si le problème est sous la forme : trouver  $u \in X$

$$a(u, v; \mu) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in X$$

ce qui interesse est une moyenne de la solution :

- on calcule la sortie (supposée linéaire)  $s = \ell(u)$

On approche donc la solution : find  $u_\delta \in X_\delta$

$$a(u_\delta, v_\delta) = \langle f, v_\delta \rangle, \quad \forall v_\delta \in X_\delta$$

et l'on introduit  $s_\delta = \ell(u_\delta)$

# Estimateurs d'erreur

sortie

La plupart du temps, on se contente d'une connaissance partielle de la solution

par exemple, si le problème est sous la forme : **trouver**  $u \in X$

$$a(u, v; \mu) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in X$$

ce qui interesse est une moyenne de la solution :

- on calcule la sortie (supposée linéaire)  $s = \ell(u)$

On approche donc la solution : find  $u_\delta \in X_\delta$

$$a(u_\delta, v_\delta) = \langle f, v_\delta \rangle, \quad \forall v_\delta \in X_\delta$$

et l'on introduit  $s_\delta = \ell(u_\delta)$

La plupart du temps, on se contente d'une connaissance partielle de la solution

par exemple, si le problème est sous la forme : **trouver**  $u \in X$

$$a(u, v; X) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in X$$

ce qui interesse est une moyenne de la solution :

- on calcule la sortie (supposée linéaire)  $s = \ell(u)$

On approche donc la solution : find  $u_\delta \in X_\delta$

$$a(u_\delta, v_\delta) = \langle f, v_\delta \rangle, \quad \forall v_\delta \in X_\delta$$

et l'on introduit  $s_\delta = \ell(u_\delta)$

La plupart du temps, on se contente d'une connaissance partielle de la solution

par exemple, si le problème est sous la forme : **trouver**  $u \in X$

$$a(u, v; X) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in X$$

ce qui interesse est une moyenne de la solution :

- on calcule la sortie (supposée linéaire)  $s = \ell(u)$

On approche donc la solution : find  $u_\delta \in X_\delta$

$$a(u_\delta, v_\delta) = \langle f, v_\delta \rangle, \quad \forall v_\delta \in X_\delta$$

et l'on introduit  $s_\delta = \ell(u_\delta)$

La plupart du temps, on se contente d'une connaissance partielle de la solution

par exemple, si le problème est sous la forme : **trouver**  $u \in X$

$$a(u, v; X) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in X$$

ce qui interesse est une moyenne de la solution :

- on calcule la sortie (supposée linéaire)  $s = \ell(u)$

On approche donc la solution : find  $u_\delta \in X_\delta$

$$a(u_\delta, v_\delta) = \langle f, v_\delta \rangle, \quad \forall v_\delta \in X_\delta$$

et l'on introduit  $s_\delta = \ell(u_\delta)$

La plupart du temps, on se contente d'une connaissance partielle de la solution

par exemple, si le problème est sous la forme : trouver  $u \in X$

$$a(u, v; X) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in X$$

ce qui interesse est une moyenne de la solution :

- on calcule la sortie (supposée linéaire)  $s = \ell(u)$

On approche donc la solution : find  $u_\delta \in X_\delta$

$$a(u_\delta, v_\delta) = \langle f, v_\delta \rangle, \quad \forall v_\delta \in X_\delta$$

et l'on introduit  $s_\delta = \ell(u_\delta)$

La convergence de  $s_\delta$  vers  $s$  est souvent très rapide

Il est classique d'introduire l'état adjoint solution du problème : trouver

$\psi \in X$

$$a(v, \psi) = -\ell(v), \quad \forall v \in X$$

Alors si  $\psi_\delta$  est la solution de l'approximation de Galerkin de  $\psi$ , on obtient

$$|s - s_\delta| \leq c \|u - u_\delta\|_X \|\psi - \psi_\delta\|_X$$

il s'agit d'estimation *a priori* .....

La convergence de  $s_\delta$  vers  $s$  est souvent très rapide

Il est classique d'introduire l'état adjoint solution du problème : trouver

$\psi \in X$

$$a(v, \psi) = -\ell(v), \quad \forall v \in X$$

Alors si  $\psi_\delta$  est la solution de l'approximation de Galerkin de  $\psi$ , on obtient

$$|s - s_\delta| \leq c \|u - u_\delta\|_X \|\psi - \psi_\delta\|_X$$

il s'agit d'estimation *a priori* .....



La convergence de  $s_\delta$  vers  $s$  est souvent très rapide

Il est classique d'introduire l'état adjoint solution du problème : trouver

$\psi \in X$

$$a(v, \psi) = -\ell(v), \quad \forall v \in X$$

Alors si  $\psi_\delta$  est la solution de l'approximation de Galerkin de  $\psi$ , on obtient

$$|s - s_\delta| \leq c \|u - u_\delta\|_X \|\psi - \psi_\delta\|_X$$

il s'agit d'estimation *a priori* .....

# Convergence a posteriori

On s'intéresse à l'estimation *a posteriori* entre  $\ell(u_h)$  and  $\ell(u_\delta)$ , on introduit donc les résidus (dans  $X_\delta$ ) correspondant aux problèmes primaux et duaux : pour tout  $v \in X$ ,

$$\mathcal{R}^{pr}(v; \mu) = a(u_\delta, v; \mu) - \langle f, v \rangle, \quad \mathcal{R}^{du}(v; \mu) = -a(v, \psi_\delta; \mu) - \ell(v).$$

on calcule les erreurs reconstruites solution des problèmes

$$2\alpha \int \nabla \hat{e}_h^{pr(du)} \nabla v_h = \mathcal{R}^{pr(du)}(v_h; \mu), \quad \forall v_h$$

et l'on a

**Théorème** Soit  $s^- = s_\delta - \alpha \int \nabla (\hat{e}_h^{pr} + \hat{e}_h^{du})^2$  alors  $s^- \leq s_h$ .

$$s_h - s^- \equiv |s_h - s_\delta|$$

tel quel non réalisable

Approche hors ligne à nouveau

# Convergence a posteriori

On s'intéresse à l'estimation *a posteriori* entre  $\ell(u_h)$  and  $\ell(u_\delta)$ , on introduit donc les résidus (dans  $X_\delta$ ) correspondant aux problèmes primaux et duaux : pour tout  $v \in X$ ,

$$\mathcal{R}^{pr}(v; \mu) = a(u_\delta, v; \mu) - \langle f, v \rangle, \quad \mathcal{R}^{du}(v; \mu) = -a(v, \psi_\delta; \mu) - \ell(v).$$

on calcule les erreurs reconstruites solution des problèmes

$$2\alpha \int \nabla \hat{e}_h^{pr(du)} \nabla v_h = \mathcal{R}^{pr(du)}(v_h; \mu), \quad \forall v_h$$

et l'on a

**Théorème** Soit  $s^- = s_\delta - \alpha \int \nabla (\hat{e}_h^{pr} + \hat{e}_h^{du})^2$  alors  $s^- \leq s_h$ .

$$s_h - s^- \equiv |s_h - s_\delta|$$

tel quel non réalisable

Approche hors ligne à nouveau

# Convergence a posteriori

On s'intéresse à l'estimation *a posteriori* entre  $\ell(u_h)$  and  $\ell(u_\delta)$ , on introduit donc les résidus (dans  $X_\delta$ ) correspondant aux problèmes primaux et duaux : pour tout  $v \in X$ ,

$$\mathcal{R}^{pr}(v; \mu) = a(u_\delta, v; \mu) - \langle f, v \rangle, \quad \mathcal{R}^{du}(v; \mu) = -a(v, \psi_\delta; \mu) - \ell(v).$$

on calcule les erreurs reconstruites solution des problèmes

$$2\alpha \int \nabla \hat{e}_h^{pr(du)} \nabla v_h = \mathcal{R}^{pr(du)}(v_h; \mu), \quad \forall v_h$$

et l'on a

**Théorème** Soit  $s^- = s_\delta - \alpha \int \nabla (\hat{e}_h^{pr} + \hat{e}_h^{du})^2$  alors  $s^- \leq s_h$ .

$$s_h - s^- \equiv |s_h - s_\delta|$$

tel quel non réalisable

Approche hors ligne à nouveau

# Convergence a posteriori

On s'intéresse à l'estimation *a posteriori* entre  $\ell(u_h)$  and  $\ell(u_\delta)$ , on introduit donc les résidus (dans  $X_\delta$ ) correspondant aux problèmes primaux et duaux : pour tout  $v \in X$ ,

$$\mathcal{R}^{pr}(v; \mu) = a(u_\delta, v; \mu) - \langle f, v \rangle, \quad \mathcal{R}^{du}(v; \mu) = -a(v, \psi_\delta; \mu) - \ell(v).$$

on calcule les erreurs reconstruites solution des problèmes

$$2\alpha \int \nabla \hat{e}_h^{pr(du)} \nabla v_h = \mathcal{R}^{pr(du)}(v_h; \mu), \quad \forall v_h$$

et l'on a

**Théorème** Soit  $s^- = s_\delta - \alpha \int \nabla (\hat{e}_h^{pr} + \hat{e}_h^{du})^2$  alors  $s^- \leq s_h$ .

$$s_h - s^- \equiv |s_h - s_\delta|$$

tel quel non réalisable

Approche hors ligne à nouveau

# Convergence a posteriori

On s'intéresse à l'estimation *a posteriori* entre  $\ell(u_h)$  and  $\ell(u_\delta)$ , on introduit donc les résidus (dans  $X_\delta$ ) correspondant aux problèmes primaux et duaux : pour tout  $v \in X$ ,

$$\mathcal{R}^{pr}(v; \mu) = a(u_\delta, v; \mu) - \langle f, v \rangle, \quad \mathcal{R}^{du}(v; \mu) = -a(v, \psi_\delta; \mu) - \ell(v).$$

on calcule les erreurs reconstruites solution des problèmes

$$2\alpha \int \nabla \hat{e}_h^{pr(du)} \nabla v_h = \mathcal{R}^{pr(du)}(v_h; \mu), \quad \forall v_h$$

et l'on a

**Théorème** Soit  $s^- = s_\delta - \alpha \int \nabla (\hat{e}_h^{pr} + \hat{e}_h^{du})^2$  alors  $s^- \leq s_h$ .

$$s_h - s^- \equiv |s_h - s_\delta|$$

tel quel non réalisable

Approche hors ligne à nouveau

# Convergence a posteriori

On s'intéresse à l'estimation *a posteriori* entre  $\ell(u_h)$  and  $\ell(u_\delta)$ , on introduit donc les résidus (dans  $X_\delta$ ) correspondant aux problèmes primaux et duaux : pour tout  $v \in X$ ,

$$\mathcal{R}^{pr}(v; \mu) = a(u_\delta, v; \mu) - \langle f, v \rangle, \quad \mathcal{R}^{du}(v; \mu) = -a(v, \psi_\delta; \mu) - \ell(v).$$

on calcule les erreurs reconstruites solution des problèmes

$$2\alpha \int \nabla \hat{e}_h^{pr(du)} \nabla v_h = \mathcal{R}^{pr(du)}(v_h; \mu), \quad \forall v_h$$

et l'on a

**Théorème** Soit  $s^- = s_\delta - \alpha \int \nabla (\hat{e}_h^{pr} + \hat{e}_h^{du})^2$  alors  $s^- \leq s_h$ .

$$s_h - s^- \equiv |s_h - s_\delta|$$

tel quel non réalisable

Approche hors ligne à nouveau

# Convergence a posteriori

On s'intéresse à l'estimation *a posteriori* entre  $\ell(u_h)$  and  $\ell(u_\delta)$ , on introduit donc les résidus (dans  $X_\delta$ ) correspondant aux problèmes primaux et duaux : pour tout  $v \in X$ ,

$$\mathcal{R}^{pr}(v; \mu) = a(u_\delta, v; \mu) - \langle f, v \rangle, \quad \mathcal{R}^{du}(v; \mu) = -a(v, \psi_\delta; \mu) - \ell(v).$$

on calcule les erreurs reconstruites solution des problèmes

$$2\alpha \int \nabla \hat{e}_h^{pr(du)} \nabla v_h = \mathcal{R}^{pr(du)}(v_h; \mu), \quad \forall v_h$$

et l'on a

**Théorème** Soit  $s^- = s_\delta - \alpha \int \nabla (\hat{e}_h^{pr} + \hat{e}_h^{du})^2$  alors  $s^- \leq s_h$ .

$$s_h - s^- \equiv |s_h - s_\delta|$$

tel quel non réalisable

Approche hors ligne à nouveau



# Convergence a posteriori

On s'intéresse à l'estimation *a posteriori* entre  $\ell(u_h)$  and  $\ell(u_\delta)$ , on introduit donc les résidus (dans  $X_\delta$ ) correspondant aux problèmes primaux et duaux : pour tout  $v \in X$ ,

$$\mathcal{R}^{pr}(v; \mu) = a(u_\delta, v; \mu) - \langle f, v \rangle, \quad \mathcal{R}^{du}(v; \mu) = -a(v, \psi_\delta; \mu) - \ell(v).$$

on calcule les erreurs reconstruites solution des problèmes

$$2\alpha \int \nabla \hat{e}_h^{pr(du)} \nabla v_h = \mathcal{R}^{pr(du)}(v_h; \mu), \quad \forall v_h$$

et l'on a

**Théorème** Soit  $s^- = s_\delta - \alpha \int \nabla (\hat{e}_h^{pr} + \hat{e}_h^{du})^2$  alors  $s^- \leq s_h$ .

$$s_h - s^- \equiv |s_h - s_\delta|$$

tel quel non réalisable

Approche hors ligne à nouveau

# Convergence a posteriori

On s'intéresse à l'estimation *a posteriori* entre  $\ell(u_h)$  and  $\ell(u_\delta)$ , on introduit donc les résidus (dans  $X_\delta$ ) correspondant aux problèmes primaux et duaux : pour tout  $v \in X$ ,

$$\mathcal{R}^{pr}(v; \mu) = a(u_\delta, v; \mu) - \langle f, v \rangle, \quad \mathcal{R}^{du}(v; \mu) = -a(v, \psi_\delta; \mu) - \ell(v).$$

on calcule les erreurs reconstruites solution des problèmes

$$2\alpha \int \nabla \hat{e}_h^{pr(du)} \nabla v_h = \mathcal{R}^{pr(du)}(v_h; \mu), \quad \forall v_h$$

et l'on a

**Théorème** Soit  $s^- = s_\delta - \alpha \int \nabla (\hat{e}_h^{pr} + \hat{e}_h^{du})^2$  alors  $s^- \leq s_h$ .

$$s_h - s^- \equiv |s_h - s_\delta|$$

tel quel non réalisable

Approche hors ligne à nouveau

# Convergence a posteriori

On s'intéresse à l'estimation *a posteriori* entre  $\ell(u_h)$  and  $\ell(u_\delta)$ , on introduit donc les résidus (dans  $X_\delta$ ) correspondant aux problèmes primaux et duaux : pour tout  $v \in X$ ,

$$\mathcal{R}^{pr}(v; \mu) = a(u_\delta, v; \mu) - \langle f, v \rangle, \quad \mathcal{R}^{du}(v; \mu) = -a(v, \psi_\delta; \mu) - \ell(v).$$

on calcule les erreurs reconstruites solution des problèmes

$$2\alpha \int \nabla \hat{e}_h^{pr(du)} \nabla v_h = \mathcal{R}^{pr(du)}(v_h; \mu), \quad \forall v_h$$

et l'on a

**Théorème** Soit  $s^- = s_\delta - \alpha \int \nabla (\hat{e}_h^{pr} + \hat{e}_h^{du})^2$  alors  $s^- \leq s_h$ .

$$s_h - s^- \equiv |s_h - s_\delta|$$

tel quel non réalisable

Approche hors ligne à nouveau

# Convergence a posteriori

On s'intéresse à l'estimation *a posteriori* entre  $\ell(u_h)$  and  $\ell(u_\delta)$ , on introduit donc les résidus (dans  $X_\delta$ ) correspondant aux problèmes primaux et duaux : pour tout  $v \in X$ ,

$$\mathcal{R}^{pr}(v; \mu) = a(u_\delta, v; \mu) - \langle f, v \rangle, \quad \mathcal{R}^{du}(v; \mu) = -a(v, \psi_\delta; \mu) - \ell(v).$$

on calcule les erreurs reconstruites solution des problèmes

$$2\alpha \int \nabla \hat{e}_h^{pr(du)} \nabla v_h = \mathcal{R}^{pr(du)}(v_h; \mu), \quad \forall v_h$$

et l'on a

**Théorème** Soit  $s^- = s_\delta - \alpha \int \nabla (\hat{e}_h^{pr} + \hat{e}_h^{du})^2$  alors  $s^- \leq s_h$ .

$$s_h - s^- \equiv |s_h - s_\delta|$$

tel quel non réalisable

Approche hors ligne à nouveau

# Convergence a posteriori

On s'intéresse à l'estimation *a posteriori* entre  $\ell(u_h)$  and  $\ell(u_\delta)$ , on introduit donc les résidus (dans  $X_\delta$ ) correspondant aux problèmes primaux et duaux : pour tout  $v \in X$ ,

$$\mathcal{R}^{pr}(v; \mu) = a(u_\delta, v; \mu) - \langle f, v \rangle, \quad \mathcal{R}^{du}(v; \mu) = -a(v, \psi_\delta; \mu) - \ell(v).$$

on calcule les erreurs reconstruites solution des problèmes

$$2\alpha \int \nabla \hat{e}_h^{pr(du)} \nabla v_h = \mathcal{R}^{pr(du)}(v_h; \mu), \quad \forall v_h$$

et l'on a

**Théorème** Soit  $s^- = s_\delta - \alpha \int \nabla (\hat{e}_h^{pr} + \hat{e}_h^{du})^2$  alors  $s^- \leq s_h$ .

$$s_h - s^- \equiv |s_h - s_\delta|$$

tel quel non réalisable

Approche hors ligne à nouveau

# Proof of the Theorem

Let us denote by  $e_\delta$  the difference between the exact solution and the approximated one  $e_\delta = u - u_\delta$ . We first observe that

$$2\alpha \int \nabla \hat{e}^{pr} \nabla e_\delta = -a(e_\delta, e_\delta; \mu)$$

and

$$2\alpha \int \nabla \hat{e}^{du} \nabla e_\delta = -a(e_\delta, \psi_\delta; \mu) - \ell(e_\delta) = -f(\psi_\delta) + a(u_\delta, \psi_\delta) - \ell(e_\delta).$$

Taking this into account allows to write

$$\begin{aligned} s_\delta - \alpha \int \nabla (\hat{e}^{pr} + \hat{e}^{du})^2 &= s_\delta - a(u_\delta, \psi_\delta) + f(\psi_\delta) - \alpha \int \nabla (\hat{e}^{pr} + \hat{e}^{du})^2 \\ &= s - \alpha \int \nabla (e_\delta + \hat{e}^{pr} + \hat{e}^{du})^2 - a(e_\delta, e_\delta; \mu) + \alpha \int [\nabla e_\delta]^2, \end{aligned} \quad (2)$$

and the proof follows from the uniform ellipticity of  $a(\cdot, \cdot; \mu)$ .

## 1 Motivation

- Cadre de l'approche
- Un exemple

## 2 De l'idée à la mise en œuvre

- Mise en œuvre en boîte noire
- Estimateurs d'erreur
- **Sélection des paramètres de bases réduites**

## 3 EIM

- Motivation
- Approximation in a space of small  $n$ -width

## 4 Definition of the empirical interpolation procedure

- The magic points
- Rapid evaluation of matrices and nonlinear contributions

## 5 Reduced element method

- Motivation
- Application to fluid flows

# Sélection des paramètres de bases réduites

- Par exemple de façon aléatoire.... et on croise les doigts....  
.... en fait ça n'est pas si mal la plupart du temps.
- SVD/POD.
- Un procédé constructif et moins couteux peut être donné....  
... basé sur l'estimateur a posteriori.
  - on choisit (au hasard) un premier paramètre
  - on batit une approximation base réduite de dimension 1 et le second paramètre est celui ou l'erreur prédite est la plus grande.  
on a alors 2 solutions, donc un espace de base réduite de dimension 2.
  - le paramètre où l'erreur prédite est la plus grande devient le troisième paramètre.  
et l'on continue ainsi...



# Sélection des paramètres de bases réduites

- Par exemple de façon aléatoire.... et on croise les doigts....  
.... en fait ça n'est pas si mal la plupart du temps.
- SVD/POD.
- Un procédé constructif et moins coûteux peut être donné....  
... basé sur l'estimateur a posteriori.
  - on choisit (au hasard) un premier paramètre
  - on batit une approximation base réduite de dimension 1 et le second paramètre est celui où l'erreur prédite est la plus grande.  
..... on a alors 2 solutions, donc un espace de base réduite de dimension 2.
  - le paramètre où l'erreur prédite est la plus grande devient le troisième paramètre.

et l'on continue ainsi...

# Sélection des paramètres de bases réduites

- Par exemple de façon aléatoire.... et on croise les doigts....  
.... en fait ça n'est pas si mal la plupart du temps.
- SVD/POD.
- Un procédé constructif et moins coûteux peut être donné....  
... basé sur l'estimateur a posteriori.
  - on choisit (au hasard) un premier paramètre
  - on batit une approximation base réduite de dimension 1 et le second paramètre est celui où l'erreur prédite est la plus grande.  
on a alors 2 solutions, donc un espace de base réduite de dimension 2.
  - le paramètre où l'erreur prédite est la plus grande devient le troisième paramètre.

et l'on continue ainsi...

# Sélection des paramètres de bases réduites

- Par exemple de façon aléatoire.... et on croise les doigts....  
.... en fait ça n'est pas si mal la plupart du temps.
- SVD/POD.
- Un procédé constructif et moins couteux peut être donné....  
... basé sur l'estimateur a posteriori.
  - on choisit (au hasard) un premier paramètre
  - on batit une approximation base réduite de dimension 1 et le second paramètre est celui ou l'erreur prédite est la plus grande.  
..... on a alors 2 solutions, donc un espace de base réduite de dimension 2.
  - le paramètre où l'erreur prédite est la plus grande devient le troisième paramètre.

et l'on continue ainsi...

# Sélection des paramètres de bases réduites

- Par exemple de façon aléatoire.... et on croise les doigts....  
.... en fait ça n'est pas si mal la plupart du temps.
- SVD/POD.
- Un procédé constructif et moins couteux peut être donné....  
... basé sur l'estimateur a posteriori.
  - on choisit (au hasard) un premier paramètre
  - on batit une approximation base réduite de dimension 1 et le second paramètre est celui où l'erreur prédite est la plus grande.  
..... on a alors 2 solutions, donc un espace de base réduite de dimension 2.
  - le paramètre où l'erreur prédite est la plus grande devient le troisième paramètre.

et l'on continue ainsi...

# Sélection des paramètres de bases réduites

- Par exemple de façon aléatoire.... et on croise les doigts....  
.... en fait ça n'est pas si mal la plupart du temps.
- SVD/POD.
- Un procédé constructif et moins coûteux peut être donné....  
... basé sur l'estimateur a posteriori.
  - on choisit (au hasard) un premier paramètre
  - on batit une approximation base réduite de dimension 1 et le second paramètre est celui où l'erreur prédite est la plus grande.  
..... on a alors 2 solutions, donc un espace de base réduite de dimension 2.
  - le paramètre où l'erreur prédite est la plus grande devient le troisième paramètre.

et l'on continue ainsi...

# Sélection des paramètres de bases réduites

- Par exemple de façon aléatoire.... et on croise les doigts....  
.... en fait ça n'est pas si mal la plupart du temps.
- SVD/POD.
- Un procédé constructif et moins couteux peut être donné....  
... basé sur l'estimateur a posteriori.
  - on choisit (au hasard) un premier paramètre
  - on batit une approximation base réduite de dimension 1 et le second paramètre est celui ou l'erreur prédite est la plus grande.  
on a alors 2 solutions, donc un espace de base réduite de dimension 2.
  - le paramètre où l'erreur prédite est la plus grande devient le troisième paramètre.

et l'on continue ainsi...

# Sélection des paramètres de bases réduites

- Par exemple de façon aléatoire.... et on croise les doigts....  
.... en fait ça n'est pas si mal la plupart du temps.
- SVD/POD.
- Un procédé constructif et moins couteux peut être donné....  
... basé sur l'estimateur a posteriori.
  - on choisit (au hasard) un premier paramètre
  - on batit une approximation base réduite de dimension 1 et le second paramètre est celui ou l'erreur prédite est la plus grande.  
on a alors 2 solutions, donc un espace de base réduite de dimension 2.
  - le paramètre où l'erreur prédite est la plus grande devient le troisième paramètre.

et l'on continue ainsi...

# Sélection des paramètres de bases réduites

- Par exemple de façon aléatoire.... et on croise les doigts....  
.... en fait ça n'est pas si mal la plupart du temps.
- SVD/POD.
- Un procédé constructif et moins couteux peut être donné....  
... basé sur l'estimateur a posteriori.
  - on choisit (au hasard) un premier paramètre
  - on batit une approximation base réduite de dimension 1 et le second paramètre est celui ou l'erreur prédite est la plus grande.  
on a alors 2 solutions, donc un espace de base réduite de dimension 2.
  - le paramètre où l'erreur prédite est la plus grande devient le troisième paramètre.

et l'on continue ainsi...



# Sélection des paramètres de bases réduites

- Par exemple de façon aléatoire.... et on croise les doigts....  
.... en fait ça n'est pas si mal la plupart du temps.
- SVD/POD.
- Un procédé constructif et moins couteux peut être donné....  
... basé sur l'estimateur a posteriori.
  - on choisit (au hasard) un premier paramètre
  - on batit une approximation base réduite de dimension 1 et le second paramètre est celui ou l'erreur prédite est la plus grande.  
on a alors 2 solutions, donc un espace de base réduite de dimension 2.
  - le paramètre où l'erreur prédite est la plus grande devient le troisième paramètre.

et l'on continue ainsi...

## 1 Motivation

- Cadre de l'approche
- Un exemple

## 2 De l'idée à la mise en œuvre

- Mise en œuvre en boîte noire
- Estimateurs d'erreur
- Sélection des paramètres de bases réduites

## 3 EIM

- **Motivation**
- Approximation in a space of small  $n$ -width

## 4 Definition of the empirical interpolation procedure

- The magic points
- Rapid evaluation of matrices and nonlinear contributions

## 5 Reduced element method

- Motivation
- Application to fluid flows

Cette approche de bases réduites peut être développée pour une large classe de problèmes....

notion d'épaisseur de l'ensemble des solutions  $S = \{u(\mu)\}$ :

$$d_N = \inf_{X_N} \sup_{a \in S} \inf_{x \in X_N} \|a - x\|$$

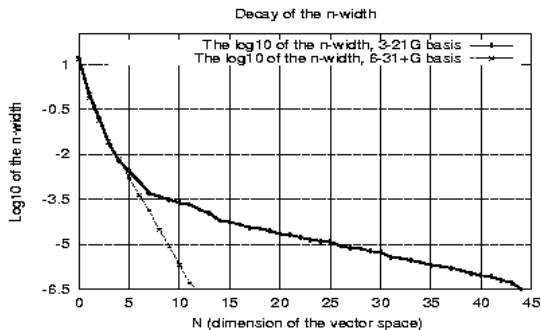
Cette approche de bases réduites peut être développée pour une large classe de problèmes....

notion d'épaisseur de l'ensemble des solutions  $S = \{u(\mu)\}$ :

$$d_N = \inf_{X_N} \sup_{a \in S} \inf_{x \in X_N} \|a - x\|$$

# Motivation

une épaisseur typique.



- On note une décroissance rapide (même exponentielle)
- Des estimations a posteriori sont disponibles
- On peut inventer de nouvelles approches.....
- On arrive à des convergences quasi optimales.....

.... Imaginez de pouvoir résoudre votre problème favori

avec moins de 50 d.d.I. !!

MAIS

quel est le prix à payer ??

- On note une décroissance rapide (même exponentielle)
- Des estimations a posteriori sont disponibles
- On peut inventer de nouvelles approches.....
- On arrive à des convergences quasi optimales.....

.... Imaginez de pouvoir résoudre votre problème favori

avec moins de 50 d.d.l. !!

MAIS

quel est le prix à payer ??

- On note une décroissance rapide (même exponentielle)
- Des estimations a posteriori sont disponibles
- On peut inventer de nouvelles approches.....
- On arrive à des convergences quasi optimales.....

.... Imaginez de pouvoir résoudre votre problème favori

avec moins de 50 d.d.I. !!

MAIS

quel est le prix à payer ??



- On note une décroissance rapide (même exponentielle)
- Des estimations a posteriori sont disponibles
- On peut inventer de nouvelles approches.....
- On arrive à des convergences quasi optimales.....

.... Imaginez de pouvoir résoudre votre problème favori

avec moins de 50 d.d.I. !!

MAIS

quel est le prix à payer ??

- On note une décroissance rapide (même exponentielle)
- Des estimations a posteriori sont disponibles
- On peut inventer de nouvelles approches.....
- On arrive à des convergences quasi optimales.....

.... Imaginez de pouvoir résoudre votre problème favori

avec **moins de 50 d.d.I. !!**

MAIS

quel est le prix à payer ??

- On note une décroissance rapide (même exponentielle)
- Des estimations a posteriori sont disponibles
- On peut inventer de nouvelles approches.....
- On arrive à des convergences quasi optimales.....

.... Imaginez de pouvoir résoudre votre problème favori

avec **moins de 50 d.d.I. !!**

**MAIS**

quel est le prix à payer ??

- On note une décroissance rapide (même exponentielle)
- Des estimations a posteriori sont disponibles
- On peut inventer de nouvelles approches.....
- On arrive à des convergences quasi optimales.....

.... Imaginez de pouvoir résoudre votre problème favori

avec **moins de 50 d.d.I. !!**

**MAIS**

quel est le prix à payer ??

# Motivation

Les éléments de la base réduite sont en effet calculés par des méthodes conventionnelles

$\xi_j, \quad j = 1, \dots, N$  sont calculés dans un espace de dimension  $\mathcal{N}$

$$\xi(x) = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}} \hat{\xi}^{\ell} b^{\ell}(x)$$

La construction des différentes matrices (de masse ou de rigidité) nécessite de revenir à cette représentation de complexité  $\mathcal{N}$

sauf si, comme on l'a vu dans le cas affine, des pré-calculs peuvent être faits et qui conduit à une approche en boîte noire

$$a(u, v; \mu) = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v).$$

mais si le problème s'écrit  $a(u, v; \mu) = \int_{\Omega} g(x, \mu) \nabla u \nabla v$ , que peut on faire

# Motivation

Les éléments de la base réduite sont en effet calculés par des méthodes conventionnelles

$\xi_i, \quad i = 1, \dots, N$  sont calculés dans un espace de dimension  $\mathcal{N}$

$$\xi(x) = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}} \hat{\xi}^{\ell} b^{\ell}(x)$$

La construction des différentes matrices (de masse ou de rigidité) nécessite de revenir à cette représentation de complexité  $\mathcal{N}$

sauf si, comme on l'a vu dans le cas affine, des pré-calculs peuvent être faits et qui conduit à une approche en boîte noire

$$a(u, v; \mu) = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v).$$

mais si le problème s'écrit  $a(u, v; \mu) = \int_{\Omega} g(x, \mu) \nabla u \nabla v$ , que peut on faire

# Motivation

Les éléments de la base réduite sont en effet calculés par des méthodes conventionnelles

$\xi_i, \quad i = 1, \dots, N$  sont calculés dans un espace de dimension  $\mathcal{N}$

$$\xi(x) = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}} \hat{\xi}^{\ell} b^{\ell}(x)$$

La construction des différentes matrices (de masse ou de rigidité) nécessite de revenir à cette représentation de complexité  $\mathcal{N}$

sauf si, comme on l'a vu dans le cas affine, des pré-calculs peuvent être faits et qui conduit à une approche en boîte noire

$$a(u, v; \mu) = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v).$$

mais si le problème s'écrit  $a(u, v; \mu) = \int_{\Omega} g(x, \mu) \nabla u \nabla v$ , que peut on faire

# Motivation

Les éléments de la base réduite sont en effet calculés par des méthodes conventionnelles

$\xi_i, \quad i = 1, \dots, N$  sont calculés dans un espace de dimension  $\mathcal{N}$

$$\xi(x) = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}} \hat{\xi}^{\ell} \mathbf{b}^{\ell}(x)$$

La construction des différentes matrices (de masse ou de rigidité) nécessite de revenir à cette représentation de complexité  $\mathcal{N}$

sauf si, comme on l'a vu dans le cas affine, des pré-calculs peuvent être faits et qui conduit à une approche en boîte noire

$$a(u, v; \mu) = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v).$$

mais si le problème s'écrit  $a(u, v; \mu) = \int_{\Omega} g(x, \mu) \nabla u \nabla v$ , que peut on faire



# Motivation

Les éléments de la base réduite sont en effet calculés par des méthodes conventionnelles

$\xi_i, \quad i = 1, \dots, N$  sont calculés dans un espace de dimension  $\mathcal{N}$

$$\xi(x) = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}} \hat{\xi}^{\ell} b^{\ell}(x)$$

La construction des différentes matrices (de masse ou de rigidité) nécessite de revenir à cette représentation de complexité  $\mathcal{N}$

sauf si, comme on l'a vu dans le cas affine, des pré-calculs peuvent être faits et qui conduit à une approche en boîte noire

$$a(u, v; \mu) = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v).$$

mais si le problème s'écrit  $a(u, v; \mu) = \int_{\Omega} g(x, \mu) \nabla u \nabla v$ , que peut on faire

# Motivation

Les éléments de la base réduite sont en effet calculés par des méthodes conventionnelles

$\xi_i, \quad i = 1, \dots, N$  sont calculés dans un espace de dimension  $\mathcal{N}$

$$\xi(x) = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}} \hat{\xi}^{\ell} b^{\ell}(x)$$

La construction des différentes matrices (de masse ou de rigidité) nécessite de revenir à cette représentation de complexité  $\mathcal{N}$

sauf si, comme on l'a vu dans le cas affine, des pré-calculs peuvent être faits et qui conduit à une approche en boîte noire

$$a(u, v; \mu) = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v).$$

mais si le problème s'écrit  $a(u, v; \mu) = \int_{\Omega} g(x, \mu) \nabla u \nabla v$ , que peut on faire

# Motivation

Les éléments de la base réduite sont en effet calculés par des méthodes conventionnelles

$\xi_i, \quad i = 1, \dots, N$  sont calculés dans un espace de dimension  $\mathcal{N}$

$$\xi(x) = \sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}} \hat{\xi}^{\ell} \mathbf{b}^{\ell}(x)$$

La construction des différentes matrices (de masse ou de rigidité) nécessite de revenir à cette représentation de complexité  $\mathcal{N}$

sauf si, comme on l'a vu dans le cas affine, des pré-calculs peuvent être faits et qui conduit à une approche en boîte noire

$$a(u, v; \mu) = \sum_{p=1}^P g_p(\mu) a_p(u, v).$$

mais si le problème s'écrit  $a(u, v; \mu) = \int_{\Omega} g(x, \mu) \nabla u \nabla v$ , que peut on faire

# Motivation

En effet, pour une nouvelle configuration indiquée par  $\mu$ , on doit calculer la solution de

$$\int_{\hat{\Omega}} g(x, \mu) \nabla u(x, \mu) \nabla v(x) = \int_{\hat{\Omega}} f(x) v(x)$$

où  $u$  s'exprime comme combinaison linéaire des  $\xi_j$

$$u(x, \mu) \simeq \sum_{j=1}^N \alpha_j \xi_j$$

la matrice de rigidité à construire est

$$\int_{\hat{\Omega}} g(x, \mu) \nabla \xi_j \nabla \xi_i$$

qui ne peut se faire, de façon exacte et en général qu'en revenant à l'écriture des  $\xi_j$  dans la base des éléments finis....

il faut donc accepter une nouvelle approximation...

# Motivation

En effet, pour une nouvelle configuration indiquée par  $\mu$ , on doit calculer la solution de

$$\int_{\hat{\Omega}} g(x, \mu) \nabla u(x, \mu) \nabla v(x) = \int_{\hat{\Omega}} f(x) v(x)$$

où  $u$  s'exprime comme combinaison linéaire des  $\xi_j$

$$u(x, \mu) \simeq \sum_{j=1}^N \alpha_j \xi_j$$

la matrice de rigidité à construire est

$$\int_{\hat{\Omega}} g(x, \mu) \nabla \xi_j \nabla \xi_i$$

qui ne peut se faire, de façon exacte et en général qu'en revenant à l'écriture des  $\xi_j$  dans la base des éléments finis....

il faut donc accepter une nouvelle approximation...

# Motivation

En effet, pour une nouvelle configuration indiquée par  $\mu$ , on doit calculer la solution de

$$\int_{\hat{\Omega}} g(x, \mu) \nabla u(x, \mu) \nabla v(x) = \int_{\hat{\Omega}} f(x) v(x)$$

où  $u$  s'exprime comme combinaison linéaire des  $\xi_j$

$$u(x, \mu) \simeq \sum_{j=1}^N \alpha_j \xi_j$$

la matrice de rigidité à construire est

$$\int_{\hat{\Omega}} g(x, \mu) \nabla \xi_j \nabla \xi_i$$

qui ne peut se faire, de façon exacte et en général qu'en revenant à l'écriture des  $\xi_j$  dans la base des éléments finis....

il faut donc accepter une nouvelle approximation...

# Motivation

En effet, pour une nouvelle configuration indiquée par  $\mu$ , on doit calculer la solution de

$$\int_{\hat{\Omega}} g(x, \mu) \nabla u(x, \mu) \nabla v(x) = \int_{\hat{\Omega}} f(x) v(x)$$

où  $u$  s'exprime comme combinaison linéaire des  $\xi_j$

$$u(x, \mu) \simeq \sum_{j=1}^N \alpha_j \xi_j$$

la matrice de rigidité à construire est

$$\int_{\hat{\Omega}} g(x, \mu) \nabla \xi_j \nabla \xi_i$$

qui ne peut se faire, de façon exacte et en général qu'en revenant à l'écriture des  $\xi_j$  dans la base des éléments finis....

il faut donc accepter une nouvelle approximation.....

Si en fait très peu de fonctions de bases sont utiles pour approcher les  $u(\cdot, \mu)$  en fonction des  $\xi_j = u(\cdot, \mu_j)$

c'est sans doute que peu de fonctions sont nécessaires pour exprimer les  $g(\cdot, \mu)$  en fonction de  $g(\cdot, \mu_j)$  bien choisis

la question est : comment ???



Si en fait très peu de fonctions de bases sont utiles pour approcher les  $u(\cdot, \mu)$  en fonction des  $\xi_j = u(\cdot, \mu_j)$

c'est sans doute que peu de fonctions sont nécessaires pour exprimer les  $g(\cdot, \mu)$  en fonction de  $g(\cdot, \mu_j)$  bien choisis

la question est : comment ???

Si en fait très peu de fonctions de bases sont utiles pour approcher les  $u(\cdot, \mu)$  en fonction des  $\xi_j = u(\cdot, \mu_j)$

c'est sans doute que peu de fonctions sont nécessaires pour exprimer les  $g(\cdot, \mu)$  en fonction de  $g(\cdot, \mu_j)$  bien choisis

la question est : comment ???

Si en fait très peu de fonctions de bases sont utiles pour approcher les  $u(\cdot, \mu)$  en fonction des  $\xi_j = u(\cdot, \mu_j)$

c'est sans doute que peu de fonctions sont nécessaires pour exprimer les  $g(\cdot, \mu)$  en fonction de  $g(\cdot, \mu_j)$  bien choisis

la question est : comment ???

Si en fait très peu de fonctions de bases sont utiles pour approcher les  $u(\cdot, \mu)$  en fonction des  $\xi_j = u(\cdot, \mu_j)$

c'est sans doute que peu de fonctions sont nécessaires pour exprimer les  $g(\cdot, \mu)$  en fonction de  $g(\cdot, \mu_j)$  bien choisis

la question est : comment ???

Si en fait très peu de fonctions de bases sont utiles pour approcher les  $u(\cdot, \mu)$  en fonction des  $\xi_j = u(\cdot, \mu_j)$

c'est sans doute que peu de fonctions sont nécessaires pour exprimer les  $g(\cdot, \mu)$  en fonction de  $g(\cdot, \mu_j)$  bien choisis

je dirais même plus... how ???

Si en fait très peu de fonctions de bases sont utiles pour approcher les  $u(\cdot, \mu)$  en fonction des  $\xi_j = u(\cdot, \mu_j)$

c'est sans doute que peu de fonctions sont nécessaires pour exprimer les  $g(\cdot, \mu)$  en fonction de  $g(\cdot, \mu_j)$  bien choisis

je dirais même plus... how ???

# A simple question

Assume an approximation  $u(\cdot, \mu) \simeq \sum \alpha_i \zeta_i$  is available

How do you get an approximation of  $e^u(\cdot, \mu) \simeq \sum \beta_i e^{\zeta_i}$

of course in an hyperfast way

note also that very few functions should be required to express  $g(\cdot, \mu)$  as a linear combination of the  $g(\cdot, \mu_j)$

# A simple question

Assume an approximation  $u(\cdot, \mu) \simeq \sum \alpha_i \zeta_i$  is available

How do you get an approximation of  $e^u(\cdot, \mu) \simeq \sum \beta_i e^{\zeta_i}$

of course in an hyperfast way

note also that very few functions should be required to express  $g(\cdot, \mu)$  as a linear combination of the  $g(\cdot, \mu_j)$



# A simple question

Assume an approximation  $u(\cdot, \mu) \simeq \sum \alpha_i \zeta_i$  is available

How do you get an approximation of  $e^u(\cdot, \mu) \simeq \sum \beta_i e^{\zeta_i}$

of course in an hyperfast way

note also that very few functions should be required to express  $g(\cdot, \mu)$  as a linear combination of the  $g(\cdot, \mu_j)$

# A simple question

Assume an approximation  $u(., \mu) \simeq \sum \alpha_i \zeta_i$  is available

How do you get an approximation of  $e^u(., \mu) \simeq \sum \beta_i e^{\zeta_i}$

of course in an hyperfast way

note also that very few functions should be required to express  $g(., \mu)$  as a linear combination of the  $g(., \mu_j)$

# A simple question

Assume an approximation  $u(\cdot, \mu) \simeq \sum \alpha_i \zeta_i$  is available

How do you get an approximation of  $e^u(\cdot, \mu) \simeq \sum \beta_i e^{\zeta_i}$

of course in an hyperfast way

note also that very few functions should be required to express  $g(\cdot, \mu)$  as a linear combination of the  $g(\cdot, \mu_j)$

# Interpolation process : $g = g(x, \mu)$

Assume that we have been able to select some values of the parameter  $\bar{\mu}_k$ ,  $k = 1, \dots, M$  such that the  $g(x, \bar{\mu}_k)$  are linearly independent.

We want to build an approximation  $g_M(\cdot, \mu)$  of  $g(\cdot, \mu)$  that belongs to  $\text{Span}\{g(\cdot, \bar{\mu}_k), 1 \leq k \leq M\}$

This has to be fast.... a good way is through interpolation

# Interpolation process : $g = g(x, \mu)$

Assume that we have been able to select some values of the parameter  $\bar{\mu}_k$ ,  $k = 1, \dots, M$  such that the  $g(x, \bar{\mu}_k)$  are linearly independent.

We want to build an approximation  $g_M(\cdot, \mu)$  of  $g(\cdot, \mu)$  that belongs to  $\text{Span}\{g(\cdot, \bar{\mu}_k), 1 \leq k \leq M\}$

This has to be fast.... a good way is through interpolation

# Interpolation process : $g = g(x, \mu)$

Assume that we have been able to select some values of the parameter  $\bar{\mu}_k$ ,  $k = 1, \dots, M$  such that the  $g(x, \bar{\mu}_k)$  are linearly independent.

We want to build an approximation  $g_M(\cdot, \mu)$  of  $g(\cdot, \mu)$  that belongs to  $\text{Span}\{g(\cdot, \bar{\mu}_k), 1 \leq k \leq M\}$

This has to be fast.... a good way is through interpolation

# Background.

## General issues about interpolation

Interpolation is a general and classical tool for approximation

Assume you are given a set  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$  of linearly independent functions, given a function  $f$  that you want to approximate, the problem is

- find a family of scalars  $\{\alpha_n^M\}_{1 \leq n \leq M}$  such that
- $f(\zeta_m^M) = \sum_{n=1}^M \alpha_n^M \varphi_n(\zeta_m^M)$

where the *interpolation points*  $\zeta_m^M$  are suitably chosen

of course, the project is generally not limited to the approximation in the only

$$X_M = \text{Span}\{\varphi_n, 1 \leq n \leq M\}$$

# Background.

## General issues about interpolation

Interpolation is a general and classical tool for approximation

Assume you are given a set  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$  of linearly independent functions, given a function  $f$  that you want to approximate, the problem is

- find a family of scalars  $\{\alpha_n^M\}_{1 \leq n \leq M}$  such that
- $f(\zeta_m^M) = \sum_{n=1}^M \alpha_n^M \varphi_n(\zeta_m^M)$

where the *interpolation points*  $\zeta_m^M$  are suitably chosen

of course, the project is generally not limited to the approximation in the only

$$X_M = \text{Span}\{\varphi_n, 1 \leq n \leq M\}$$



# Background.

## General issues about interpolation

Interpolation is a general and classical tool for approximation

Assume you are given a set  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$  of linearly independent functions, given a function  $f$  that you want to approximate, the problem is

- find a family of scalars  $\{\alpha_n^M\}_{1 \leq n \leq M}$  such that
- $f(\zeta_m^M) = \sum_{n=1}^M \alpha_n^M \varphi_n(\zeta_m^M)$

where the *interpolation points*  $\zeta_m^M$  are suitably chosen

of course, the project is generally not limited to the approximation in the only

$$X_M = \text{Span}\{\varphi_n, 1 \leq n \leq M\}$$

# Background.

## General issues about interpolation

Interpolation is a general and classical tool for approximation

Assume you are given a set  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$  of linearly independent functions, given a function  $f$  that you want to approximate, the problem is

- find a family of scalars  $\{\alpha_n^M\}_{1 \leq n \leq M}$  such that
- $f(\zeta_m^M) = \sum_{n=1}^M \alpha_n^M \varphi_n(\zeta_m^M)$

where the *interpolation points*  $\zeta_m^M$  are suitably chosen

of course, the project is generally not limited to the approximation in the only

$$X_M = \text{Span}\{\varphi_n, 1 \leq n \leq M\}$$

# Background.

## General issues about interpolation

Interpolation is a general and classical tool for approximation

Assume you are given a set  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$  of linearly independent functions, given a function  $f$  that you want to approximate, the problem is

- find a family of scalars  $\{\alpha_n^M\}_{1 \leq n \leq M}$  such that
- $f(\zeta_m^M) = \sum_{n=1}^M \alpha_n^M \varphi_n(\zeta_m^M)$

where the *interpolation points*  $\zeta_m^M$  are suitably chosen

of course, the project is generally not limited to the approximation in the only

$$X_M = \text{Span}\{\varphi_n, 1 \leq n \leq M\}$$

# Background.

## General issues about interpolation

Interpolation is a general and classical tool for approximation

Assume you are given a set  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$  of linearly independent functions, given a function  $f$  that you want to approximate, the problem is

- find a family of scalars  $\{\alpha_n^M\}_{1 \leq n \leq M}$  such that
- $f(\zeta_m^M) = \sum_{n=1}^M \alpha_n^M \varphi_n(\zeta_m^M)$

where the *interpolation points*  $\zeta_m^M$  are suitably chosen

of course, the project is generally not limited to the approximation in the only

$$X_M = \text{Span}\{\varphi_n, 1 \leq n \leq M\}$$

# Background.

## General issues about interpolation

Interpolation is a general and classical tool for approximation

Assume you are given a set  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$  of linearly independent functions, given a function  $f$  that you want to approximate, the problem is

- find a family of scalars  $\{\alpha_n^M\}_{1 \leq n \leq M}$  such that
- $f(\zeta_m^M) = \sum_{n=1}^M \alpha_n^M \varphi_n(\zeta_m^M)$

where the *interpolation points*  $\zeta_m^M$  are suitably chosen

of course, the project is generally not limited to the approximation in the only

$$X_M = \text{Span}\{\varphi_n, 1 \leq n \leq M\}$$

# Background.

## General issues about interpolation

### Among the classical questions raised by interpolation

- given a set of points, does the interpolant at these points exist;
- is the interpolant unique;
- how does the interpolation process compares with other approximations (in particular orthogonal projections);
- is there an optimal selection for the interpolation points;
- is there a constructive optimal selection for the interpolation points;

These question are covered in the polynomial case, though not completely and the answers are complex and rather recent

# Background.

## General issues about interpolation

Among the classical questions raised by interpolation

- given a set of points, does the interpolant at these points exist;
- is the interpolant unique;
- how does the interpolation process compares with other approximations (in particular orthogonal projections);
- is there an optimal selection for the interpolation points;
- is there a constructive optimal selection for the interpolation points;

These question are covered in the polynomial case, though not completely and the answers are complex and rather recent

# Background.

## General issues about interpolation

Among the classical questions raised by interpolation

- given a set of points, does the interpolant at these points exist;
- is the interpolant unique;
- how does the interpolation process compares with other approximations (in particular orthogonal projections);
- is there an optimal selection for the interpolation points;
- is there a constructive optimal selection for the interpolation points;

These question are covered in the polynomial case, though not completely and the answers are complex and rather recent



# Background.

## General issues about interpolation

Among the classical questions raised by interpolation

- given a set of points, does the interpolant at these points exist;
- is the interpolant unique;
- how does the interpolation process compares with other approximations (in particular orthogonal projections);
- is there an optimal selection for the interpolation points;
- is there a constructive optimal selection for the interpolation points;

These question are covered in the polynomial case, though not completely and the answers are complex and rather recent

# Background.

## General issues about interpolation

Among the classical questions raised by interpolation

- given a set of points, does the interpolant at these points exist;
- is the interpolant unique;
- how does the interpolation process compares with other approximations (in particular orthogonal projections);
- is there an optimal selection for the interpolation points;
- is there a constructive optimal selection for the interpolation points;

These question are covered in the polynomial case, though not completely and the answers are complex and rather recent

# Background.

## General issues about interpolation

Among the classical questions raised by interpolation

- given a set of points, does the interpolant at these points exist;
- is the interpolant unique;
- how does the interpolation process compares with other approximations (in particular orthogonal projections);
- is there an optimal selection for the interpolation points;
- is there a constructive optimal selection for the interpolation points;

These question are covered in the polynomial case, though not completely and the answers are complex and rather recent

# Background.

## General issues about interpolation

Among the classical questions raised by interpolation

- given a set of points, does the interpolant at these points exist;
- is the interpolant unique;
- how does the interpolation process compares with other approximations (in particular orthogonal projections);
- is there an optimal selection for the interpolation points;
- is there a constructive optimal selection for the interpolation points;

These question are covered in the polynomial case, though not completely and the answers are complex and rather recent

# Background.

## General issues about interpolation

Among the classical questions raised by interpolation

- given a set of points, does the interpolant at these points exist;
- is the interpolant unique;
- how does the interpolation process compares with other approximations (in particular orthogonal projections);
- is there an optimal selection for the interpolation points;
- is there a constructive optimal selection for the interpolation points;

These question are covered in the polynomial case, though not completely and the answers are complex and rather recent

- 1 Motivation
  - Cadre de l'approche
  - Un exemple
- 2 De l'idée à la mise en œuvre
  - Mise en œuvre en boîte noire
  - Estimateurs d'erreur
  - Sélection des paramètres de bases réduites
- 3 EIM
  - Motivation
  - **Approximation in a space of small  $n$ -width**
- 4 Definition of the empirical interpolation procedure
  - The magic points
  - Rapid evaluation of matrices and nonlinear contributions
- 5 Reduced element method
  - Motivation
  - Application to fluid flows

# Approximation in a space of small $n$ -width.

## Interpolation

We are looking for a constructive way of approximating in  $\mathcal{Y}$ , we assume that  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{C}^0$

We propose a greedy approach both for constructing the interpolation points and the discrete spaces  $Y_M$ ,

our method is hierarchical , note that we do not know yet on which function we are going to interpolate

# Approximation in a space of small $n$ -width.

## Interpolation

We are looking for a constructive way of approximating in  $\mathcal{Y}$ , we assume that  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{C}^0$

We propose a greedy approach both for constructing the interpolation points and the discrete spaces  $Y_M$ ,

our method is hierarchical , note that we do not know yet on which function we are going to interpolate



# Approximation in a space of small $n$ -width.

## Interpolation

We are looking for a constructive way of approximating in  $\mathcal{Y}$ , we assume that  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{C}^0$

We propose a greedy approach both for constructing the interpolation points and the discrete spaces  $Y_M$ ,

our method is hierarchical , note that we do not know yet on which function we are going to interpolate

# Approximation in a space of small $n$ -width.

## Interpolation

We are looking for a constructive way of approximating in  $\mathcal{Y}$ , we assume that  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{C}^0$

We propose a greedy approach both for constructing the interpolation points and the discrete spaces  $Y_M$ ,

our method is hierarchical , **note that we do not know yet on which function we are going to interpolate**

- 1 Motivation
  - Cadre de l'approche
  - Un exemple
- 2 De l'idée à la mise en œuvre
  - Mise en œuvre en boîte noire
  - Estimateurs d'erreur
  - Sélection des paramètres de bases réduites
- 3 EIM
  - Motivation
  - Approximation in a space of small  $n$ -width
- 4 **Definition of the empirical interpolation procedure**
  - **The magic points**
  - Rapid evaluation of matrices and nonlinear contributions
- 5 Reduced element method
  - Motivation
  - Application to fluid flows

# Approximation in a space of small $n$ -width.

definition of the magic points

The first interpolating function is

$$\varphi_1 = \arg \max_{\Phi \in \mathcal{S}_1[Y]} \|\Phi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

The first interpolation point is

$$\zeta_1 = \arg \max_{x \in \Omega} |\varphi_1|$$

and we set  $q_1 = \varphi_1(\cdot) / \varphi_1(\zeta_1)$  The second interpolating function is

$$\varphi_2 = \arg \max_{\Phi \in \mathcal{S}_1[Y]} \|\Phi(\cdot) - \Phi(\zeta_1)q_1\|_{L^\infty(\Omega)}$$

The second interpolation point is

$$\zeta_2 = \arg \max_{x \in \Omega} |\varphi_2(\cdot) - \varphi_2(\zeta_1)q_1|$$

and we set  $q_2 = \varphi_2(\cdot) - \varphi_2(\zeta_1)q_1 / \varphi_2(\zeta_2) - \varphi_2(\zeta_1)q_1(\zeta_2)$  and we proceed by induction

# Approximation in a space of small $n$ -width.

definition of the magic points

The first interpolating function is

$$\varphi_1 = \arg \max_{\Phi \in \mathcal{S}_1[Y]} \|\Phi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

The first interpolation point is

$$\zeta_1 = \arg \max_{x \in \Omega} |\varphi_1|$$

and we set  $q_1 = \varphi_1(\cdot)/\varphi_1(\zeta_1)$  The second interpolating function is

$$\varphi_2 = \arg \max_{\Phi \in \mathcal{S}_1[Y]} \|\Phi(\cdot) - \Phi(\zeta_1)q_1\|_{L^\infty(\Omega)}$$

The second interpolation point is

$$\zeta_2 = \arg \max_{x \in \Omega} |\varphi_2(\cdot) - \varphi_2(\zeta_1)q_1|$$

and we set  $q_2 = \varphi_2(\cdot) - \varphi_2(\zeta_1)q_1 / \varphi_2(\zeta_2) - \varphi_2(\zeta_1)q_1(\zeta_2)$  and we proceed by induction

# Approximation in a space of small $n$ -width.

definition of the magic points

The first interpolating function is

$$\varphi_1 = \arg \max_{\Phi \in \mathcal{S}_1[Y]} \|\Phi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

The first interpolation point is

$$\zeta_1 = \arg \max_{x \in \Omega} |\varphi_1|$$

and we set  $q_1 = \varphi_1(\cdot) / \varphi_1(\zeta_1)$  The second interpolating function is

$$\varphi_2 = \arg \max_{\Phi \in \mathcal{S}_1[Y]} \|\Phi(\cdot) - \Phi(\zeta_1)q_1\|_{L^\infty(\Omega)}$$

The second interpolation point is

$$\zeta_2 = \arg \max_{x \in \Omega} |\varphi_2(\cdot) - \varphi_2(\zeta_1)q_1|$$

and we set  $q_2 = \varphi_2(\cdot) - \varphi_2(\zeta_1)q_1 / \varphi_2(\zeta_2) - \varphi_2(\zeta_1)q_1(\zeta_2)$  and we proceed by induction

# Approximation in a space of small $n$ -width.

definition of the magic points

The first interpolating function is

$$\varphi_1 = \arg \max_{\Phi \in \mathcal{S}_1[Y]} \|\Phi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

The first interpolation point is

$$\zeta_1 = \arg \max_{x \in \Omega} |\varphi_1|$$

and we set  $q_1 = \varphi_1(\cdot) / \varphi_1(\zeta_1)$  The second interpolating function is

$$\varphi_2 = \arg \max_{\Phi \in \mathcal{S}_1[Y]} \|\Phi(\cdot) - \Phi(\zeta_1)q_1\|_{L^\infty(\Omega)}$$

The second interpolation point is

$$\zeta_2 = \arg \max_{x \in \Omega} |\varphi_2(\cdot) - \varphi_2(\zeta_1)q_1|$$

and we set  $q_2 = \varphi_2(\cdot) - \varphi_2(\zeta_1)q_1 / \varphi_2(\zeta_2) - \varphi_2(\zeta_1)q_1(\zeta_2)$  and we proceed by induction

# Approximation in a space of small $n$ -width.

definition of the magic points

The first interpolating function is

$$\varphi_1 = \arg \max_{\Phi \in \mathcal{S}_1[Y]} \|\Phi\|_{L^\infty(\Omega)}$$

The first interpolation point is

$$\zeta_1 = \arg \max_{x \in \Omega} |\varphi_1|$$

and we set  $q_1 = \varphi_1(\cdot) / \varphi_1(\zeta_1)$  The second interpolating function is

$$\varphi_2 = \arg \max_{\Phi \in \mathcal{S}_1[Y]} \|\Phi(\cdot) - \Phi(\zeta_1)q_1\|_{L^\infty(\Omega)}$$

The second interpolation point is

$$\zeta_2 = \arg \max_{x \in \Omega} |\varphi_2(\cdot) - \varphi_2(\zeta_1)q_1|$$

and we set  $q_2 = \varphi_2(\cdot) - \varphi_2(\zeta_1)q_1 / \varphi_2(\zeta_2) - \varphi_2(\zeta_1)q_1(\zeta_2)$  and we proceed by induction



# Approximation in a space of small $n$ -width.

## The recursion formula

We thus construct, by induction, the nested sets of basis functions  $\{q_1, \dots, q_M\}$  and the nested sets of interpolation points

$$T_M = \{\zeta_1, \dots, \zeta_M\}, \quad 1 \leq M \leq M_{\max},$$

For  $M = 3, \dots, M_{\max}$ , we first solve the interpolation problem for  $\alpha_j^{M-1}(\Phi)$ ,  $1 \leq j \leq M-1$ , from

$$\sum_{j=1}^{M-1} q_j(\zeta_i) \alpha_j^{M-1}(\Phi) = \Phi(\zeta_i), \quad i = 1, \dots, M-1, \quad (3)$$

and compute

$$\mathcal{I}_{M-1}[\Phi] = \sum_{j=1}^{M-1} \alpha_j^{M-1}(\Phi) q_j, \quad (4)$$

and

$$\varepsilon_{M-1}(\Phi) = \|\Phi(\cdot) - \mathcal{I}_{M-1}[\Phi(\cdot)]\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (5)$$

for all  $\Phi \in Y$ ;

# Approximation in a space of small $n$ -width.

## The recursion formula

We thus construct, by induction, the nested sets of basis functions  $\{q_1, \dots, q_M\}$  and the nested sets of interpolation points

$$T_M = \{\zeta_1, \dots, \zeta_M\}, \quad 1 \leq M \leq M_{\max},$$

For  $M = 3, \dots, M_{\max}$ , we first solve the interpolation problem for  $\alpha_j^{M-1}(\Phi)$ ,  $1 \leq j \leq M-1$ , from

$$\sum_{j=1}^{M-1} q_j(\zeta_i) \alpha_j^{M-1}(\Phi) = \Phi(\zeta_i), \quad i = 1, \dots, M-1, \quad (3)$$

and compute

$$\mathcal{I}_{M-1}[\Phi] = \sum_{j=1}^{M-1} \alpha_j^{M-1}(\Phi) q_j, \quad (4)$$

and

$$\varepsilon_{M-1}(\Phi) = \|\Phi(\cdot) - \mathcal{I}_{M-1}[\Phi(\cdot)]\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (5)$$

for all  $\Phi \in Y$ ;

# Approximation in a space of small $n$ -width.

## The recursion formula

We thus construct, by induction, the nested sets of basis functions  $\{q_1, \dots, q_M\}$  and the nested sets of interpolation points

$$T_M = \{\zeta_1, \dots, \zeta_M\}, \quad 1 \leq M \leq M_{\max},$$

For  $M = 3, \dots, M_{\max}$ , we first solve the interpolation problem for  $\alpha_j^{M-1}(\Phi)$ ,  $1 \leq j \leq M-1$ , from

$$\sum_{j=1}^{M-1} q_j(\zeta_i) \alpha_j^{M-1}(\Phi) = \Phi(\zeta_i), \quad i = 1, \dots, M-1, \quad (3)$$

and compute

$$\mathcal{I}_{M-1}[\Phi] = \sum_{j=1}^{M-1} \alpha_j^{M-1}(\Phi) q_j, \quad (4)$$

and

$$\varepsilon_{M-1}(\Phi) = \|\Phi(\cdot) - \mathcal{I}_{M-1}[\Phi(\cdot)]\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (5)$$

for all  $\Phi \in Y$ ;

# Approximation in a space of small $n$ -width.

## The recursion formula

We thus construct, by induction, the nested sets of basis functions  $\{q_1, \dots, q_M\}$  and the nested sets of interpolation points

$$T_M = \{\zeta_1, \dots, \zeta_M\}, \quad 1 \leq M \leq M_{\max},$$

For  $M = 3, \dots, M_{\max}$ , we first solve the interpolation problem for  $\alpha_j^{M-1}(\Phi)$ ,  $1 \leq j \leq M-1$ , from

$$\sum_{j=1}^{M-1} q_j(\zeta_i) \alpha_j^{M-1}(\Phi) = \Phi(\zeta_i), \quad i = 1, \dots, M-1, \quad (3)$$

and compute

$$\mathcal{I}_{M-1}[\Phi] = \sum_{j=1}^{M-1} \alpha_j^{M-1}(\Phi) q_j, \quad (4)$$

and

$$\varepsilon_{M-1}(\Phi) = \|\Phi(\cdot) - \mathcal{I}_{M-1}[\Phi(\cdot)]\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (5)$$

for all  $\Phi \in Y$ ;

# Approximation in a space of small $n$ -width.

## The recursion formula

We thus construct, by induction, the nested sets of basis functions  $\{q_1, \dots, q_M\}$  and the nested sets of interpolation points

$$T_M = \{\zeta_1, \dots, \zeta_M\}, \quad 1 \leq M \leq M_{\max},$$

For  $M = 3, \dots, M_{\max}$ , we first solve the interpolation problem for  $\alpha_j^{M-1}(\Phi)$ ,  $1 \leq j \leq M-1$ , from

$$\sum_{j=1}^{M-1} q_j(\zeta_i) \alpha_j^{M-1}(\Phi) = \Phi(\zeta_i), \quad i = 1, \dots, M-1, \quad (3)$$

and compute

$$\mathcal{I}_{M-1}[\Phi] = \sum_{j=1}^{M-1} \alpha_j^{M-1}(\Phi) q_j, \quad (4)$$

and

$$\varepsilon_{M-1}(\Phi) = \|\Phi(\cdot) - \mathcal{I}_{M-1}[\Phi(\cdot)]\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (5)$$

for all  $\Phi \in Y$ ;

# Approximation in a space of small $n$ -width.

The recursion formula

We then define

$$\varphi_M = \arg \max_{\Phi \in \mathcal{S}_1[Y]} \varepsilon_{M-1}(\Phi), \quad (6)$$

and

$$\zeta_M = \arg \max_{x \in \Omega} \|\varphi_M(x) - \mathcal{I}_{M-1}[\varphi_M(x)]\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (7)$$

we finally set  $q_M(x) = \frac{\varphi_M - \mathcal{I}_{M-1}[\varphi_M]}{\varphi_M(\zeta_M) - \mathcal{I}_{M-1}[\varphi_M](\zeta_M)}$  and  
 $B_{ij}^M = q_j(x_i), 1 \leq i, j \leq M.$

The procedure is well posed if  $Y$  is of sufficiently large dimension (for  $M \leq M_{max} \leq \dim Y$ ).

Note that the matrix  $B^M$  is invertible and lower triangular (the diagonal is  $Id$ ).

# Approximation in a space of small $n$ -width.

The recursion formula

We then define

$$\varphi_M = \arg \max_{\Phi \in \mathcal{S}_1[Y]} \varepsilon_{M-1}(\Phi), \quad (6)$$

and

$$\zeta_M = \arg \max_{x \in \Omega} \|\varphi_M(x) - \mathcal{I}_{M-1}[\varphi_M(x)]\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (7)$$

we finally set  $q_M(x) = \frac{\varphi_M - \mathcal{I}_{M-1}[\varphi_M]}{\varphi_M(\zeta_M) - \mathcal{I}_{M-1}[\varphi_M](\zeta_M)}$  and  
 $B_{ij}^M = q_j(x_i), 1 \leq i, j \leq M.$

The procedure is well posed if  $Y$  is of sufficiently large dimension (for  $M \leq M_{max} \leq \dim Y$ ).

Note that the matrix  $B^M$  is invertible and lower triangular (the diagonal is  $Id$ ).

# Approximation in a space of small $n$ -width.

The recursion formula

We then define

$$\varphi_M = \arg \max_{\Phi \in \mathcal{S}_1[Y]} \varepsilon_{M-1}(\Phi), \quad (6)$$

and

$$\zeta_M = \arg \max_{x \in \Omega} \|\varphi_M(x) - \mathcal{I}_{M-1}[\varphi_M(x)]\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (7)$$

we finally set  $q_M(x) = \frac{\varphi_M - \mathcal{I}_{M-1}[\varphi_M]}{\varphi_M(\zeta_M) - \mathcal{I}_{M-1}[\varphi_M](\zeta_M)}$  and  
 $B_{ij}^M = q_j(x_i), 1 \leq i, j \leq M.$

The procedure is well posed if  $Y$  is of sufficiently large dimension (for  $M \leq M_{max} \leq \dim Y$ ).

Note that the matrix  $B^M$  is invertible and lower triangular (the diagonal is  $Id$ ).



# Approximation in a space of small $n$ -width.

The recursion formula

We then define

$$\varphi_M = \arg \max_{\Phi \in \mathcal{S}_1[Y]} \varepsilon_{M-1}(\Phi), \quad (6)$$

and

$$\zeta_M = \arg \max_{x \in \Omega} \|\varphi_M(x) - \mathcal{I}_{M-1}[\varphi_M(x)]\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (7)$$

we finally set  $q_M(x) = \frac{\varphi_M - \mathcal{I}_{M-1}[\varphi_M]}{\varphi_M(\zeta_M) - \mathcal{I}_{M-1}[\varphi_M](\zeta_M)}$  and  
 $B_{ij}^M = q_j(x_i), 1 \leq i, j \leq M.$

The procedure is well posed if  $Y$  is of sufficiently large dimension (for  $M \leq M_{max} \leq \dim Y$ ).

Note that the matrix  $B^M$  is invertible and lower triangular (the diagonal is  $Id$ ).

# Approximation in a space of small $n$ -width.

The recursion formula

We then define

$$\varphi_M = \arg \max_{\Phi \in \mathcal{S}_1[Y]} \varepsilon_{M-1}(\Phi), \quad (6)$$

and

$$\zeta_M = \arg \max_{x \in \Omega} \|\varphi_M(x) - \mathcal{I}_{M-1}[\varphi_M(x)]\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (7)$$

we finally set  $q_M(x) = \frac{\varphi_M - \mathcal{I}_{M-1}[\varphi_M]}{\varphi_M(\zeta_M) - \mathcal{I}_{M-1}[\varphi_M](\zeta_M)}$  and  
 $B_{ij}^M = q_j(x_i), 1 \leq i, j \leq M.$

The procedure is well posed if  $Y$  is of sufficiently large dimension (for  $M \leq M_{max} \leq \dim Y$ ).

Note that the matrix  $B^M$  is invertible and lower triangular (the diagonal is  $Id$ ).

# Approximation in a space of small $n$ -width.

The recursion formula

We then define

$$\varphi_M = \arg \max_{\Phi \in \mathcal{S}_1[Y]} \varepsilon_{M-1}(\Phi), \quad (6)$$

and

$$\zeta_M = \arg \max_{x \in \Omega} \|\varphi_M(x) - \mathcal{I}_{M-1}[\varphi_M(x)]\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (7)$$

we finally set  $q_M(x) = \frac{\varphi_M - \mathcal{I}_{M-1}[\varphi_M]}{\varphi_M(\zeta_M) - \mathcal{I}_{M-1}[\varphi_M](\zeta_M)}$  and  
 $B_{ij}^M = q_j(x_i), 1 \leq i, j \leq M.$

The procedure is well posed if  $Y$  is of sufficiently large dimension (for  $M \leq M_{max} \leq \dim Y$ ).

Note that the matrix  $B^M$  is invertible and lower triangular (the diagonal is  $Id$ ).

- 1 Motivation
  - Cadre de l'approche
  - Un exemple
- 2 De l'idée à la mise en œuvre
  - Mise en œuvre en boîte noire
  - Estimateurs d'erreur
  - Sélection des paramètres de bases réduites
- 3 EIM
  - Motivation
  - Approximation in a space of small  $n$ -width
- 4 Definition of the empirical interpolation procedure
  - The magic points
  - **Rapid evaluation of matrices and nonlinear contributions**
- 5 Reduced element method
  - Motivation
  - Application to fluid flows

# Rapid evaluation of the different matrices

The further approximation is

$$g_M(x; \mu) = \sum_{m=1}^M \gamma_m(\mu) g(x; \bar{\mu}_m)$$

where

$$\sum_{m=1}^M \gamma_m(\mu) g(t_i; \bar{\mu}_m) = g(t_i; \mu) \quad 1 \leq i \leq M$$

This leads to the approximated construction for the stiffness matrix

$$\int_{\hat{\Omega}} g(x, \mu) \nabla \zeta_j \nabla \zeta_i \simeq \sum_{m=1}^M \gamma_m(\mu) \int_{\hat{\Omega}} g(x; \bar{\mu}_m) \nabla \zeta_j \nabla \zeta_i$$

the  $\int_{\hat{\Omega}} g(x; \mu_m)(x) \nabla \zeta_j \nabla \zeta_i$  should be pre-computed and stored

# Rapid evaluation of the different matrices

The further approximation is

$$g_M(x; \mu) = \sum_{m=1}^M \gamma_m(\mu) g(x; \bar{\mu}_m)$$

where

$$\sum_{m=1}^M \gamma_m(\mu) g(t_i; \bar{\mu}_m) = g(t_i; \mu) \quad 1 \leq i \leq M$$

This leads to the approximated construction for the stiffness matrix

$$\int_{\hat{\Omega}} g(x, \mu) \nabla \zeta_j \nabla \zeta_i \simeq \sum_{m=1}^M \gamma_m(\mu) \int_{\hat{\Omega}} g(x; \bar{\mu}_m) \nabla \zeta_j \nabla \zeta_i$$

the  $\int_{\hat{\Omega}} g(x; \mu_m)(x) \nabla \zeta_j \nabla \zeta_i$  should be pre-computed and stored

# Rapid evaluation of the different matrices

The further approximation is

$$g_M(x; \mu) = \sum_{m=1}^M \gamma_m(\mu) g(x; \bar{\mu}_m)$$

where

$$\sum_{m=1}^M \gamma_m(\mu) g(t_i; \bar{\mu}_m) = g(t_i; \mu) \quad 1 \leq i \leq M$$

This leads to the approximated construction for the stiffness matrix

$$\int_{\hat{\Omega}} g(x, \mu) \nabla \zeta_j \nabla \zeta_i \simeq \sum_{m=1}^M \gamma_m(\mu) \int_{\hat{\Omega}} g(x; \bar{\mu}_m) \nabla \zeta_j \nabla \zeta_i$$

the  $\int_{\hat{\Omega}} g(x; \mu_m)(x) \nabla \zeta_j \nabla \zeta_i$  should be pre-computed and stored

# Rapid evaluation of the different matrices

The further approximation is

$$g_M(x; \mu) = \sum_{m=1}^M \gamma_m(\mu) g(x; \bar{\mu}_m)$$

where

$$\sum_{m=1}^M \gamma_m(\mu) g(t_i; \bar{\mu}_m) = g(t_i; \mu) \quad 1 \leq i \leq M$$

This leads to the approximated construction for the stiffness matrix

$$\int_{\hat{\Omega}} g(x, \mu) \nabla \zeta_j \nabla \zeta_i \simeq \sum_{m=1}^M \gamma_m(\mu) \int_{\hat{\Omega}} g(x; \bar{\mu}_m) \nabla \zeta_j \nabla \zeta_i$$

the  $\int_{\hat{\Omega}} g(x; \mu_m)(x) \nabla \zeta_j \nabla \zeta_i$  should be pre-computed and stored



# Rapid evaluation of the different matrices

$N$	4	8	12	16
$\varepsilon_{N,M,\max}^u$	1.20 E-02	1.14 E-03	2.54 E-04	3.82 E-05
$\eta_{N,M}^u$	1.16	1.01	1.08	1.00

# Rapid evaluation of nonlinear contributions

It is the same for the nonlinear terms

e.g.  $\exp(u)$

- we use the reduced basis  $\exp(\zeta_i)$ ,  $\rightarrow W_N^{\text{exp}}$
- we select the representative collocation points
- we represent  $\exp(u(\cdot, \mu))$  by its interpolation over  $W_N^{\text{exp}}$

i.e. let  $u(\cdot, \mu)$  be approximated by  $\sum_j \alpha_j \zeta_j$ , then  $\exp(u(\cdot, \mu))$  will be approximated by  $\sum_j \beta_j \exp(\zeta_j)$ , where the  $\beta$ 's are tuned so that

$$\exp\left(\sum_j \alpha_j \zeta_j\right)(t_k) = \sum_j \beta_j \exp(\zeta_j)(t_k)$$

# Rapid evaluation of nonlinear contributions

It is the same for the nonlinear terms

e.g.  $\exp(u)$

- we use the reduced basis  $\exp(\zeta_i)$ ,  $\rightarrow W_N^{\text{exp}}$
- we select the representative collocation points
- we represent  $\exp(u(\cdot, \mu))$  by its interpolation over  $W_N^{\text{exp}}$

i.e. let  $u(\cdot, \mu)$  be approximated by  $\sum_j \alpha_j \zeta_j$ , then  $\exp(u(\cdot, \mu))$  will be approximated by  $\sum_j \beta_j \exp(\zeta_j)$ , where the  $\beta$ 's are tuned so that

$$\exp\left(\sum_j \alpha_j \zeta_j\right)(t_k) = \sum_j \beta_j \exp(\zeta_j)(t_k)$$

# Rapid evaluation of nonlinear contributions

It is the same for the nonlinear terms

e.g.  $\exp(u)$

- we use the reduced basis  $\exp(\zeta_j)$ ,  $\rightarrow W_N^{\text{exp}}$
- we select the representative collocation points
- we represent  $\exp(u(\cdot, \mu))$  by its interpolation over  $W_N^{\text{exp}}$

i.e. let  $u(\cdot, \mu)$  be approximated by  $\sum_j \alpha_j \zeta_j$ , then  $\exp(u(\cdot, \mu))$  will be approximated by  $\sum_j \beta_j \exp(\zeta_j)$ , where the  $\beta$ 's are tuned so that

$$\exp\left(\sum_j \alpha_j \zeta_j\right)(t_k) = \sum_j \beta_j \exp(\zeta_j)(t_k)$$

# Rapid evaluation of nonlinear contributions

It is the same for the nonlinear terms

e.g.  $\exp(u)$

- we use the reduced basis  $\exp(\zeta_j)$ ,  $\rightarrow W_N^{\text{exp}}$
- we select the representative collocation points
- we represent  $\exp(u(\cdot, \mu))$  by its interpolation over  $W_N^{\text{exp}}$

i.e. let  $u(\cdot, \mu)$  be approximated by  $\sum_j \alpha_j \zeta_j$ , then  $\exp(u(\cdot, \mu))$  will be approximated by  $\sum_j \beta_j \exp(\zeta_j)$ , where the  $\beta$ 's are tuned so that

$$\exp\left(\sum_j \alpha_j \zeta_j\right)(t_k) = \sum_j \beta_j \exp(\zeta_j)(t_k)$$

# Rapid evaluation of nonlinear contributions

It is the same for the nonlinear terms

e.g.  $\exp(u)$

- we use the reduced basis  $\exp(\zeta_j)$ ,  $\rightarrow W_N^{\text{exp}}$
- we select the representative collocation points
- we represent  $\exp(u(\cdot, \mu))$  by its interpolation over  $W_N^{\text{exp}}$

i.e. let  $u(\cdot, \mu)$  be approximated by  $\sum_j \alpha_j \zeta_j$ , then  $\exp(u(\cdot, \mu))$  will be approximated by  $\sum_j \beta_j \exp(\zeta_j)$ , where the  $\beta$ 's are tuned so that

$$\exp\left(\sum_j \alpha_j \zeta_j\right)(t_k) = \sum_j \beta_j \exp(\zeta_j)(t_k)$$

# Rapid evaluation of nonlinear contributions

It is the same for the nonlinear terms

e.g.  $\exp(u)$

- we use the reduced basis  $\exp(\zeta_j)$ ,  $\rightarrow W_N^{\text{exp}}$
- we select the representative collocation points
- we represent  $\exp(u(\cdot, \mu))$  by its interpolation over  $W_N^{\text{exp}}$

i.e. let  $u(\cdot, \mu)$  be approximated by  $\sum_j \alpha_j \zeta_j$ , then  $\exp(u(\cdot, \mu))$  will be approximated by  $\sum_j \beta_j \exp(\zeta_j)$ , where the  $\beta$ 's are tuned so that

$$\exp\left(\sum_j \alpha_j \zeta_j\right)(t_k) = \sum_j \beta_j \exp(\zeta_j)(t_k)$$

# Rapid evaluation of nonlinear contributions

It is the same for the nonlinear terms

e.g.  $\exp(u)$

- we use the reduced basis  $\exp(\zeta_j)$ ,  $\rightarrow W_N^{\text{exp}}$
- we select the representative collocation points
- we represent  $\exp(u(\cdot, \mu))$  by its interpolation over  $W_N^{\text{exp}}$

i.e. let  $u(\cdot, \mu)$  be approximated by  $\sum_j \alpha_j \zeta_j$ , then  $\exp(u(\cdot, \mu))$  will be approximated by  $\sum_j \beta_j \exp(\zeta_j)$ , where the  $\beta$ 's are tuned so that

$$\exp\left(\sum_j \alpha_j \zeta_j\right)(t_k) = \sum_j \beta_j \exp(\zeta_j)(t_k)$$



# Application to a non affine elliptic problem

We are interested in solving

$$-\Delta u + \mu_1 \frac{e^{\mu_2 u} - 1}{\mu_2} = f$$

the results with the interpolation process are

$N$	4	8	12	16	20
$\varepsilon_{N,M,\max}^u$	6.53 E-03	1.05 E-03	7.34 E-05	1.30 E-05	5.05 E-06
$\eta_{N,M}^u$	1.94	2.16	2.33	2.36	1.21

# Application to a non affine parabolic problem

We are interested in solving

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \mu_1 \frac{e^{\mu_2 u} - 1}{\mu_2} = f$$

the reduced basis considers 3 parameters  $\mu_1, \mu_2, t...$  results are similar

$N$	1	5	10	20	30
$\varepsilon_{N,M,\max}^u$	3.82 E-01	1.36 E-02	1.62 E-03	1.46 E-04	1.88 E-05
$\eta_{N,M}^u$	79	25.9	8.65	8.25	3.82

- 1 Motivation
  - Cadre de l'approche
  - Un exemple
- 2 De l'idée à la mise en œuvre
  - Mise en œuvre en boîte noire
  - Estimateurs d'erreur
  - Sélection des paramètres de bases réduites
- 3 EIM
  - Motivation
  - Approximation in a space of small  $n$ -width
- 4 Definition of the empirical interpolation procedure
  - The magic points
  - Rapid evaluation of matrices and nonlinear contributions
- 5 **Reduced element method**
  - **Motivation**
  - Application to fluid flows

# Motivation

Among the most prominent applications in medical applications is the analysis of internal flows

- blood flows in arteries
- air flow in the lung

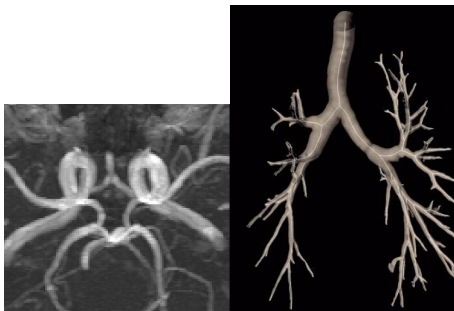


Figure: Reconstructed geometries of Willis complex (Thiriet) and of the upper part of the lung (Fetita-Prêteux)

# Motivation

Among the most prominent applications in medical applications is the analysis of internal flows

- blood flows in arteries
- air flow in the lung

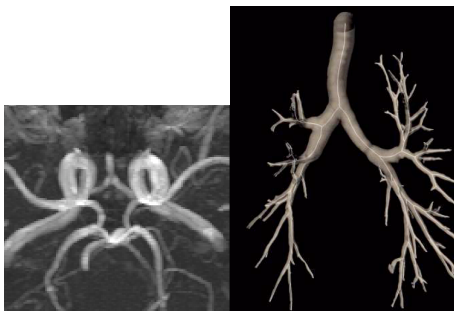


Figure: Reconstructed geometries of Willis complex (Thiriet) and of the upper part of the lung (Fetita-Prêteux)

# Motivation

Among the most prominent applications in medical applications is the analysis of internal flows

- blood flows in arteries
- air flow in the lung

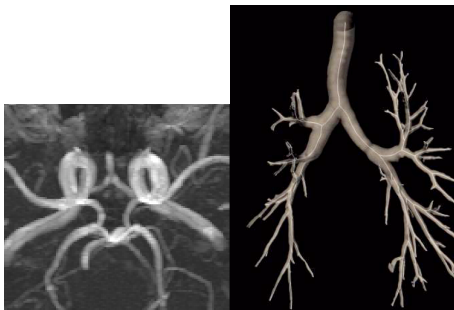
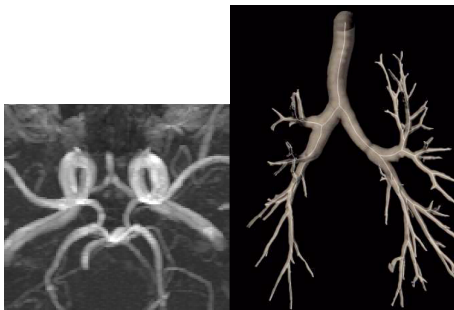


Figure: Reconstructed geometries of Willis complex (Thiriet) and of the upper part of the lung (Fetita-Prêteux)

# Motivation

Among the most prominent applications in medical applications is the analysis of internal flows

- blood flows in arteries
- air flow in the lung



**Figure:** Reconstructed geometries of Willis complex (Thiriet) and of the upper part of the lung (Fetita-Prêteux)

- In this range of applications, the challenge of the simulations comes more from the complexity of the geometry
- There is some repetitiveness or similarities in the behavior of the flow that allows for the definition of reduced model strategies.



- In this range of applications, the challenge of the simulations comes more from the complexity of the geometry
- There is some repetitiveness or similarities in the behavior of the flow that allows for the definition of reduced model strategies.

## The reduced basis element method

- Reduced basis approximation

+

- domain decomposition

## The reduced basis element method

- Reduced basis approximation

+

- domain decomposition

## The reduced basis element method

- Reduced basis approximation

+

- domain decomposition

## The reduced basis element method

- Reduced basis approximation

+

- domain decomposition

# Reduced element method

The domain of interest is first decomposed into several subdomains,

$$\bar{\Omega} = \cup_{k=1}^K \overline{\Omega_k^{bb}}$$

where each “**building block**”  $\Omega_k^{bb}$  is assumed to be the image of a reference  $\hat{\Omega}$ .

The mapping  $\varphi_k$  between  $\hat{\Omega}$  and  $\Omega_k^{bb}$  will be assumed to be **piecewise affine** (and obviously continuous) so that

$$\Omega_k^{bb} = \varphi_k[\hat{\Omega}]$$

# Reduced element method

The domain of interest is first decomposed into several subdomains,

$$\bar{\Omega} = \cup_{k=1}^K \overline{\Omega_k^{bb}}$$

where each “**building block**”  $\Omega_k^{bb}$  is assumed to be the image of a reference  $\hat{\Omega}$ .

The mapping  $\varphi_k$  between  $\hat{\Omega}$  and  $\Omega_k^{bb}$  will be assumed to be **piecewise affine** (and obviously continuous) so that

$$\Omega_k^{bb} = \varphi_k[\hat{\Omega}]$$

# Reduced element method

The domain of interest is first decomposed into several subdomains,

$$\bar{\Omega} = \cup_{k=1}^K \overline{\Omega_k^{bb}}$$

where each “**building block**”  $\Omega_k^{bb}$  is assumed to be the image of a reference  $\hat{\Omega}$ .

The mapping  $\varphi_k$  between  $\hat{\Omega}$  and  $\Omega_k^{bb}$  will be assumed to be **piecewise affine** (and obviously continuous) so that

$$\Omega_k^{bb} = \varphi_k[\hat{\Omega}]$$



The domain of interest is first decomposed into several subdomains,

$$\bar{\Omega} = \cup_{k=1}^K \overline{\Omega_k^{bb}}$$

where each “**building block**”  $\Omega_k^{bb}$  is assumed to be the image of a reference  $\hat{\Omega}$ .

The mapping  $\varphi_k$  between  $\hat{\Omega}$  and  $\Omega_k^{bb}$  will be assumed to be **piecewise affine** (and obviously continuous) so that

$$\Omega_k^{bb} = \varphi_k[\hat{\Omega}]$$

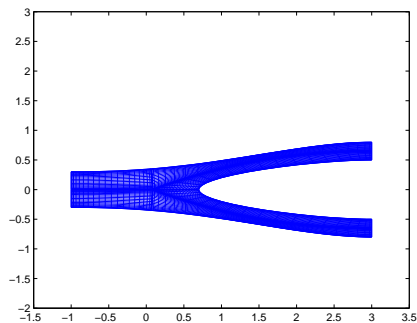


Figure: A first geometry.

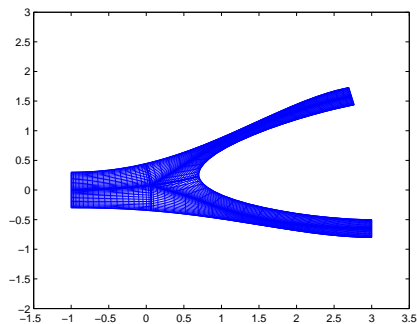


Figure: A second geometry.

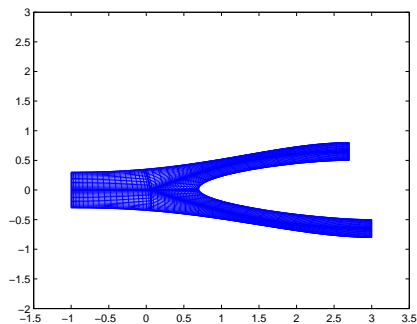


Figure: A third geometry.

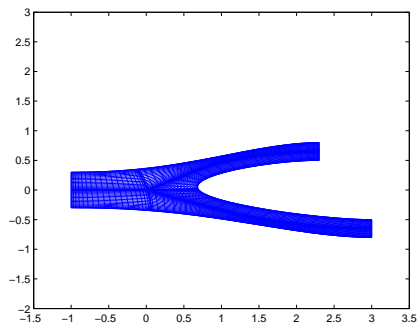


Figure: A fourth geometry.

# Reduced element method

As a precomputation, the problem of interest is solved over various deformations of each reference building block and stored, after mapping, on the reference building block.

This gives basis functions  $\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \dots, \hat{\zeta}_N$ , supposed to be linearly independent

These basic solutions are mapped over each  $\Omega_k^{bb}$  through  $\varphi_k$ .

The solution corresponding to an unknown, deformed geometry is then represented as a linear combination of these mapped solutions

$$Y_N = \{v_N \in L^2(\Omega) \mid v_N|_{\Omega_k^{bb}} \circ \varphi_k \in \text{span}\{\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \dots, \hat{\zeta}_N\}\}.$$

Note that  $Y_N$  is **not** an acceptable discretization space for  $H^1(\Omega)$ , the matching between the different subdomains is ensured through the use of Lagrange multipliers

# Reduced element method

As a precomputation, the problem of interest is solved over various deformations of each reference building block and stored, after mapping, on the reference building block.

This gives basis functions  $\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \dots, \hat{\zeta}_N$ , supposed to be linearly independent

These basic solutions are mapped over each  $\Omega_k^{bb}$  through  $\varphi_k$ . The solution corresponding to an unknown, deformed geometry is then represented as a linear combination of these mapped solutions

$$Y_N = \{v_N \in L^2(\Omega) \mid v_N|_{\Omega_k^{bb}} \circ \varphi_k \in \text{span}\{\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \dots, \hat{\zeta}_N\}\}.$$

Note that  $Y_N$  is **not** an acceptable discretization space for  $H^1(\Omega)$ , the matching between the different subdomains is ensured through the use of Lagrange multipliers

# Reduced element method

As a precomputation, the problem of interest is solved over various deformations of each reference building block and stored, after mapping, on the reference building block.

This gives basis functions  $\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \dots, \hat{\zeta}_N$ , supposed to be linearly independent

These basic solutions are mapped over each  $\Omega_k^{bb}$  through  $\varphi_k$ .

The solution corresponding to an unknown, deformed geometry is then represented as a linear combination of these mapped solutions

$$Y_N = \{v_N \in L^2(\Omega) \mid v_N|_{\Omega_k^{bb}} \circ \varphi_k \in \text{span}\{\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \dots, \hat{\zeta}_N\}\}.$$

Note that  $Y_N$  is **not** an acceptable discretization space for  $H^1(\Omega)$ , the matching between the different subdomains is ensured through the use of Lagrange multipliers



# Reduced element method

As a precomputation, the problem of interest is solved over various deformations of each reference building block and stored, after mapping, on the reference building block.

This gives basis functions  $\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \dots, \hat{\zeta}_N$ , supposed to be linearly independent

These basic solutions are mapped over each  $\Omega_k^{bb}$  through  $\varphi_k$ . The solution corresponding to an unknown, deformed geometry is then represented as a linear combination of these mapped solutions

$$Y_N = \{v_N \in L^2(\Omega) \mid v_N|_{\Omega_k^{bb}} \circ \varphi_k \in \text{span}\{\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \dots, \hat{\zeta}_N\}\}.$$

Note that  $Y_N$  is **not** an acceptable discretization space for  $H^1(\Omega)$ , the matching between the different subdomains is ensured through the use of Lagrange multipliers

# Reduced element method

As a precomputation, the problem of interest is solved over various deformations of each reference building block and stored, after mapping, on the reference building block.

This gives basis functions  $\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \dots, \hat{\zeta}_N$ , supposed to be linearly independent

These basic solutions are mapped over each  $\Omega_k^{bb}$  through  $\varphi_k$ . The solution corresponding to an unknown, deformed geometry is then represented as a linear combination of these mapped solutions

$$Y_N = \{v_N \in L^2(\Omega) \mid v_N|_{\Omega_k^{bb}} \circ \varphi_k \in \text{span}\{\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \dots, \hat{\zeta}_N\}\} .$$

Note that  $Y_N$  is **not** an acceptable discretization space for  $H^1(\Omega)$ , the matching between the different subdomains is ensured through the use of Lagrange multipliers

# Reduced element method

As a precomputation, the problem of interest is solved over various deformations of each reference building block and stored, after mapping, on the reference building block.

This gives basis functions  $\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \dots, \hat{\zeta}_N$ , supposed to be linearly independent

These basic solutions are mapped over each  $\Omega_k^{bb}$  through  $\varphi_k$ . The solution corresponding to an unknown, deformed geometry is then represented as a linear combination of these mapped solutions

$$Y_N = \{v_N \in L^2(\Omega) \mid v_N|_{\Omega_k^{bb}} \circ \varphi_k \in \text{span}\{\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \dots, \hat{\zeta}_N\}\}.$$

Note that  $Y_N$  is **not** an acceptable discretization space for  $H^1(\Omega)$ , the matching between the different subdomains is ensured through the use of Lagrange multipliers

# Reduced element method

We now define  $X_N$  to this purpose by *gluing* the functions of  $Y_N$  across the interfaces  $\gamma_{k,\ell}^{bb}$  between two stages

→ Lagrange multipliers

$$X_N = \{v \in Y_N^1, \quad \forall k, \ell, \quad \forall \psi \in W_{k,\ell}, \quad \int_{\Gamma_{k,\ell}^e} (v^+ - v^-) \psi \, ds = 0\},$$

where  $W_{k,\ell}$  is some well chosen space over  $\Gamma_{k,\ell}^e \rightarrow$  nonconforming approximation.

The discrete problem then reads : Find  $u_N$  in  $X_N$  such that

$$a(u_N, v_N) = f(v_N), \quad \forall v_N \in X_N .$$

# Reduced element method

We now define  $X_N$  to this purpose by *gluing* the functions of  $Y_N$  across the interfaces  $\gamma_{k,\ell}^{bb}$  between two stages

→ **Lagrange multipliers**

$$X_N = \{v \in Y_N^1, \quad \forall k, \ell, \quad \forall \psi \in W_{k,\ell}, \quad \int_{\Gamma_{k,\ell}^e} (v^+ - v^-) \psi \, ds = 0\},$$

where  $W_{k,\ell}$  is some well chosen space over  $\Gamma_{k,\ell}^e \rightarrow$  nonconforming approximation.

The discrete problem then reads : Find  $u_N$  in  $X_N$  such that

$$a(u_N, v_N) = f(v_N), \quad \forall v_N \in X_N .$$

# Reduced element method

We now define  $X_N$  to this purpose by *gluing* the functions of  $Y_N$  across the interfaces  $\gamma_{k,\ell}^{bb}$  between two stages

→ **Lagrange multipliers**

$$X_N = \{v \in Y_N^1, \quad \forall k, \ell, \quad \forall \psi \in W_{k,\ell}, \quad \int_{\Gamma_{k,\ell}^e} (v^+ - v^-) \psi \, ds = 0\},$$

where  $W_{k,\ell}$  is some well chosen space over  $\Gamma_{k,\ell}^e \rightarrow$  nonconforming approximation.

The discrete problem then reads : Find  $u_N$  in  $X_N$  such that

$$a(u_N, v_N) = f(v_N), \quad \forall v_N \in X_N .$$

# Reduced element method

We now define  $X_N$  to this purpose by *gluing* the functions of  $Y_N$  across the interfaces  $\gamma_{k,\ell}^{bb}$  between two stages

→ **Lagrange multipliers**

$$X_N = \{v \in Y_N^1, \quad \forall k, \ell, \quad \forall \psi \in W_{k,\ell}, \quad \int_{\Gamma_{k,\ell}^e} (v^+ - v^-) \psi \, ds = 0\},$$

where  $W_{k,\ell}$  is some well chosen space over  $\Gamma_{k,\ell}^e \rightarrow$  nonconforming approximation.

The discrete problem then reads : Find  $u_N$  in  $X_N$  such that

$$a(u_N, v_N) = f(v_N), \quad \forall v_N \in X_N .$$

# Reduced element method

We now define  $X_N$  to this purpose by *gluing* the functions of  $Y_N$  across the interfaces  $\gamma_{k,\ell}^{bb}$  between two stages

→ **Lagrange multipliers**

$$X_N = \{v \in Y_N^1, \quad \forall k, \ell, \quad \forall \psi \in W_{k,\ell}, \quad \int_{\Gamma_{k,\ell}^e} (v^+ - v^-) \psi \, ds = 0\},$$

where  $W_{k,\ell}$  is some well chosen space over  $\Gamma_{k,\ell}^e \rightarrow$  nonconforming approximation.

The discrete problem then reads : Find  $u_N$  in  $X_N$  such that

$$a(u_N, v_N) = f(v_N), \quad \forall v_N \in X_N .$$



- 1 Motivation
  - Cadre de l'approche
  - Un exemple
- 2 De l'idée à la mise en œuvre
  - Mise en œuvre en boîte noire
  - Estimateurs d'erreur
  - Sélection des paramètres de bases réduites
- 3 EIM
  - Motivation
  - Approximation in a space of small  $n$ -width
- 4 Definition of the empirical interpolation procedure
  - The magic points
  - Rapid evaluation of matrices and nonlinear contributions
- 5 Reduced element method
  - Motivation
  - Application to fluid flows

For flow problems the transformations between the reference domain and the subdomains are more involved: The PIOLA Transform that allow the work with divergence free discrete spaces

$$\hat{u} = \mathcal{J}^{-1}(u \circ \Phi)|J|,$$

→ The velocity is computed independently of the pressure

For flow problems the transformations between the reference domain and the subdomains are more involved: The PIOLA Transform that allow the work with divergence free discrete spaces

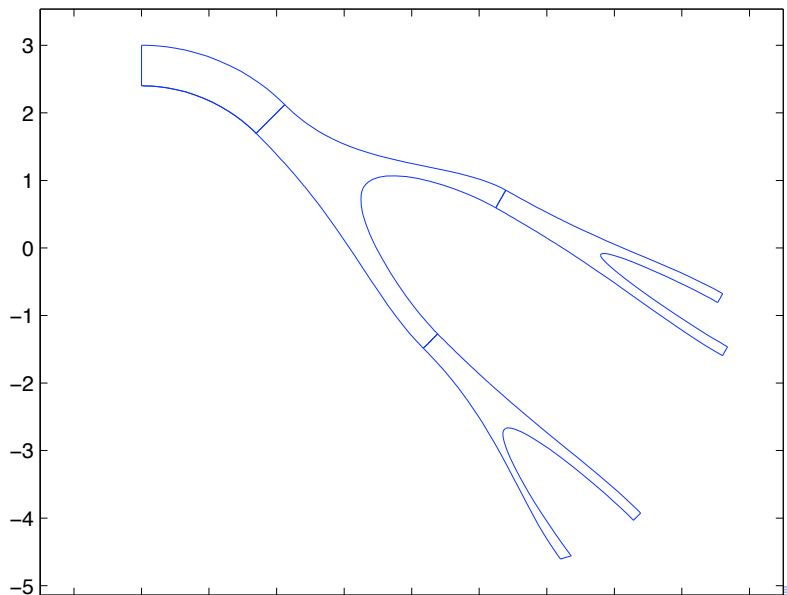
$$\hat{u} = \mathcal{J}^{-1}(u \circ \Phi)|J|,$$

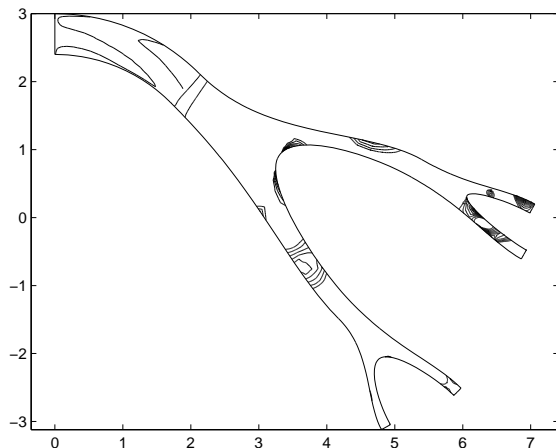
→ The velocity is computed independently of the pressure

For flow problems the transformations between the reference domain and the subdomains are more involved: The PIOLA Transform that allow the work with divergence free discrete spaces

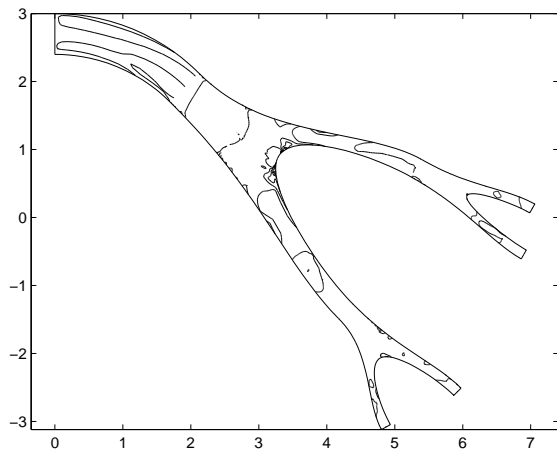
$$\hat{u} = \mathcal{J}^{-1}(u \circ \Phi)|J|,$$

→ The velocity is computed independently of the pressure





**Figure:** Error distribution for a new configuration  $N_P = 15$ ,  $N_B = 15$  error plot for the pressure  $\max = 3 \cdot 10^{-2}$ , for the velocity error  $\approx 3 \cdot 10^{-3}$ .



**Figure:** Error distribution for a new configuration  $N_P = 15$ ,  $N_B = 30$  error plot for the pressure  $\max=6 \cdot 10^{-3}$ , for the velocity error  $\simeq 4 \cdot 10^{-4}$ , size problem

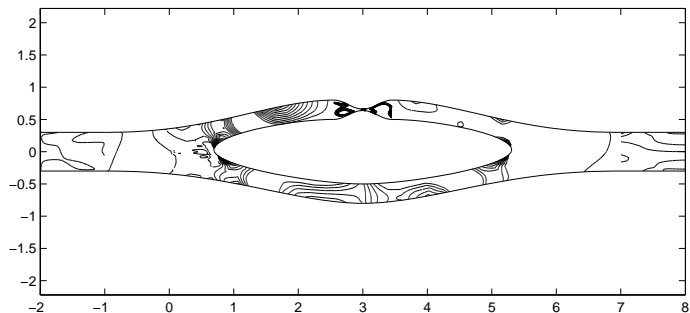


Figure: A stenosis problem with  $N_P = 15$ ,  $N_B = 15$ .



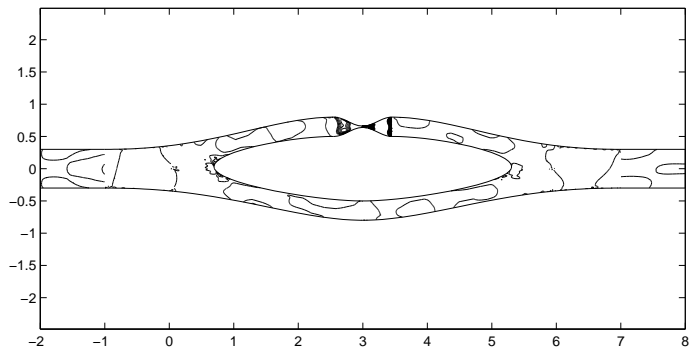


Figure: A stenosis problem with  $N_P = 15$ ,  $N_B = 30$ .

$N$	$N_1$	$N_2$	$ u_N - u _{H^1}$	$\ \rho_N - \rho\ _{L^2}$
45	9	9	$9.3 \cdot 10^{-3}$	$3.3 \cdot 10^{-1}$
55	11	11	$3.1 \cdot 10^{-3}$	$5.3 \cdot 10^{-1}$
65	13	13	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$9.0 \cdot 10^{-2}$
75	15	15	$1.4 \cdot 10^{-3}$	$5.3 \cdot 10^{-2}$
105	15	30	$5.4 \cdot 10^{-4}$	$3.0 \cdot 10^{-2}$

**Table:** Steady Stokes solution on a multi-block bypass with three pipe blocks and two bifurcation blocks. Here,  $N = 3N_1 + 2N_2$ .

# Important remarks....

- Note that contrarily to what happens in the parameter dependant problem
- The full problem over the global geometry is **never** constructed in the reduced element method
- This is a **major** achievement
  
- Note also that, more generally, the reduced basis functions have to be suitably prepared
  
- Finally, do not forget that off-line pre-computations have to be done, involving your favorite approximation method, and that the approach is rapid for online computations.

# Important remarks....

- Note that contrarily to what happens in the parameter dependant problem
- The full problem over the global geometry is **never** constructed in the reduced element method
- This is a **major** achievement
  
- Note also that, more generally, the reduced basis functions have to be suitably prepared
  
- Finally, do not forget that off-line pre-computations have to be done, involving your favorite approximation method, and that the approach is rapid for online computations.

# Important remarks....

- Note that contrarily to what happens in the parameter dependant problem
- The full problem over the global geometry is **never** constructed in the reduced element method
- This is a **major** achievement
  
- Note also that, more generally, the reduced basis functions have to be suitably prepared
  
- Finally, do not forget that off-line pre-computations have to be done, involving your favorite approximation method, and that the approach is rapid for online computations.

# Important remarks....

- Note that contrarily to what happens in the parameter dependant problem
- The full problem over the global geometry is **never** constructed in the reduced element method
- This is a **major** achievement
  
- Note also that, more generally, the reduced basis functions have to be suitably prepared
  
- Finally, do not forget that off-line pre-computations have to be done, involving your favorit approximation method, and that the approach is rapid for online computations.

# Important remarks....

- Note that contrarily to what happens in the parameter dependant problem
- The full problem over the global geometry is **never** constructed in the reduced element method
- This is a **major** achievement
  
- Note also that, more generally, the reduced basis functions have to be suitably prepared
  
- Finally, do not forget that off-line pre-computations have to be done, involving your favorite approximation method, and that the approach is rapid for online computations.

# Quelques conclusions

- **La méthode de bases réduites est performante**
- Combinée avec des estimateurs a posteriori, elle permet des calculs “en ligne” rapides et fiables
- De nombreuses quantités peuvent être utilisées en tant que paramètres : géométrie, temps.....
- L'application aux problèmes non linéaires est bien possible grâce à *la méthode d'interpolation empirique*, qui ont aussi une certaine analyse a posteriori associée
- Applications aux écoulements de N.S. : exemple RB4RB
- ..... ainsi que d'autres applications en chimie quantique par exemple
- Ainsi que pour les équations de Maxwell.
- NIRB.



# Quelques conclusions

- La méthode de bases réduites est performante
- Combinée avec des estimateurs a posteriori, elle permet des calculs “en ligne” rapides et fiables
- De nombreuses quantités peuvent être utilisées en tant que paramètres : géométrie, temps.....
- L'application aux problèmes non linéaires est bien possible grâce à *la méthode d'interpolation empirique*, qui ont aussi une certaine analyse a posteriori associée
- Applications aux écoulements de N.S. : exemple RB4RB
- ..... ainsi que d'autres applications en chimie quantique par exemple
- Ainsi que pour les équations de Maxwell.
- NIRB.

# Quelques conclusions

- La méthode de bases réduites est performante
- Combinée avec des estimateurs a posteriori, elle permet des calculs “en ligne” rapides et fiables
- De nombreuses quantités peuvent être utilisées en tant que paramètres : géométrie, temps.....
- L'application aux problèmes non linéaires est bien possible grâce à *la méthode d'interpolation empirique*, qui ont aussi une certaine analyse a posteriori associée
- Applications aux écoulements de N.S. : exemple RB4RB
- ..... ainsi que d'autres applications en chimie quantique par exemple
- Ainsi que pour les équations de Maxwell.
- NIRB.

# Quelques conclusions

- La méthode de bases réduites est performante
- Combinée avec des estimateurs a posteriori, elle permet des calculs “en ligne” rapides et fiables
- De nombreuses quantités peuvent être utilisées en tant que paramètres : géométrie, temps.....
- L'application aux problèmes non linéaires est bien possible grâce à *la méthode d'interpolation empirique*, qui ont aussi une certaine analyse a posteriori associée
- Applications aux écoulements de N.S. : exemple RB4RB
- ..... ainsi que d'autres applications en chimie quantique par exemple
- Ainsi que pour les équations de Maxwell.
- NIRB.

# Quelques conclusions

- La méthode de bases réduites est performante
- Combinée avec des estimateurs a posteriori, elle permet des calculs “en ligne” rapides et fiables
- De nombreuses quantités peuvent être utilisées en tant que paramètres : géométrie, temps.....
- L'application aux problèmes non linéaires est bien possible grâce à *la méthode d'interpolation empirique*, qui ont aussi une certaine analyse a posteriori associée
- Applications aux écoulements de N.S. : exemple RB4RB
- ..... ainsi que d'autres applications en chimie quantique par exemple
- Ainsi que pour les équations de Maxwell.
- NIRB.

# Quelques conclusions

- La méthode de bases réduites est performante
- Combinée avec des estimateurs a posteriori, elle permet des calculs “en ligne” rapides et fiables
- De nombreuses quantités peuvent être utilisées en tant que paramètres : géométrie, temps.....
- L'application aux problèmes non linéaires est bien possible grâce à *la méthode d'interpolation empirique*, qui ont aussi une certaine analyse a posteriori associée
- Applications aux écoulements de N.S. : exemple RB4RB
- ..... ainsi que d'autres applications en chimie quantique par exemple
- Ainsi que pour les équations de Maxwell.
- NIRB.

# Quelques conclusions

- La méthode de bases réduites est performante
- Combinée avec des estimateurs a posteriori, elle permet des calculs “en ligne” rapides et fiables
- De nombreuses quantités peuvent être utilisées en tant que paramètres : géométrie, temps.....
- L'application aux problèmes non linéaires est bien possible grâce à *la méthode d'interpolation empirique*, qui ont aussi une certaine analyse a posteriori associée
- Applications aux écoulements de N.S. : exemple RB4RB
- ..... ainsi que d'autres applications en chimie quantique par exemple
- Ainsi que pour les équations de Maxwell.
- NIRB.

# Quelques conclusions

- La méthode de bases réduites est performante
- Combinée avec des estimateurs a posteriori, elle permet des calculs “en ligne” rapides et fiables
- De nombreuses quantités peuvent être utilisées en tant que paramètres : géométrie, temps.....
- L'application aux problèmes non linéaires est bien possible grâce à *la méthode d'interpolation empirique*, qui ont aussi une certaine analyse a posteriori associée
- Applications aux écoulements de N.S. : exemple RB4RB
- ..... ainsi que d'autres applications en chimie quantique par exemple
- Ainsi que pour les équations de Maxwell.
- NIRB.

# Application to Maxwell

with Y. Chen, J. Hesthaven, J. Rodriguez and X Zhu

We consider here a 2D problem on electromagnetism. In both cases, the electromagnetic waves are TM-polarized, that is, the electric and magnetic fields satisfy  $E = (0, 0, E_z)$  and  $H = (H_x, H_y, 0)$  in the Maxwell's equation.

The problem is set on the domains

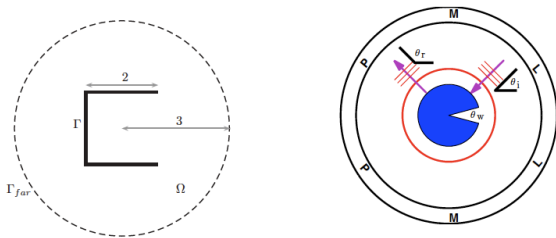


Figure: Geometries of the problems.



The coefficients that will determine the physics of the experiment are :

- the angle of incidence,
- the angle of measurement
- the angular frequency
- the angle of the wedge, leading to a modification of the geometry.

The output of interest is the radar cross section.

The equations of interest are

$$i\omega E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad \text{in } \Omega,$$

$$i\omega H_x = -\frac{\partial E_z}{\partial y} \quad \text{in } \Omega,$$

$$i\omega H_y = \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad \text{in } \Omega,$$

$$E_z = -E_{inc} \quad \text{on } \Gamma,$$

# Application to Maxwell....

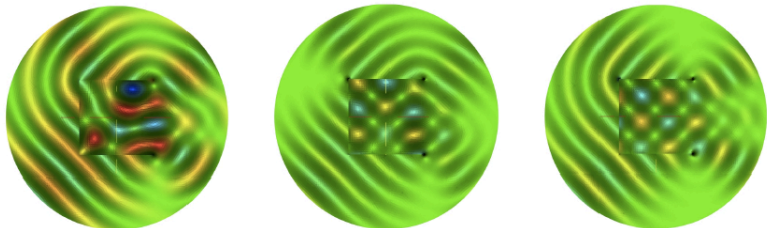


FIG. 3.1. *Solution of the problem on the open cavity (from left to right:  $E_z$ ,  $H_x$  and  $H_y$ ) for  $\omega = 2\pi$  and  $\theta = 5\pi/4$ .*

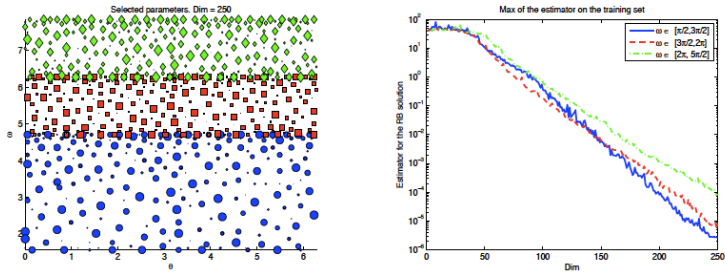
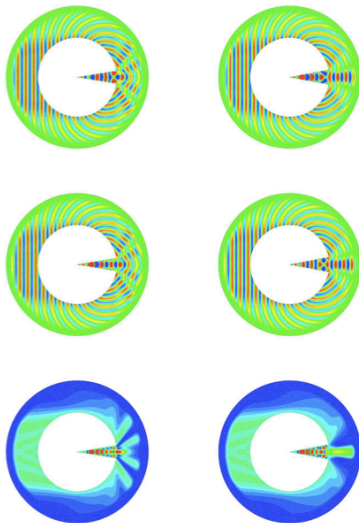


FIG. 3.5. Construction of the reduced basis when  $(\theta, \omega)$  is in  $[0, 2\pi] \times [\pi/2, 3\pi/2]$  (in blue),  $[0, 2\pi] \times [3\pi/2, 2\pi]$  (in red) and  $[0, 2\pi] \times [2\pi, 5\pi/2]$  (in green). On the left are the parameters selected by RBM (the larger the markers the earlier they have been chosen). On the right is the evolution of the maximum over the train sets  $\Xi_i^{\text{train}}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  of the a posteriori error estimator when the dimension of the reduced basis is increased.

# Application to Maxwell....

1 parameter (angle)



# Application to Maxwell....

1 parameter (angle)

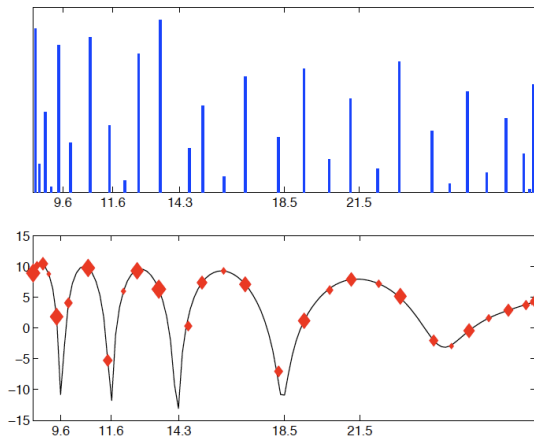


FIG. 3.14. The 29  $\theta_W$ 's the greedy algorithm of the RBM picks to build the RB space. Top: the higher the vertical line, the earlier that point was picked. Bottom: the points scattered on the monostatic scattering curve  $10\log_{10}(RCS(10\pi, \theta_W, 0, 0))$ , the larger the marker, the earlier it is selected.

# Application to Maxwell....

1 parameter (angle)

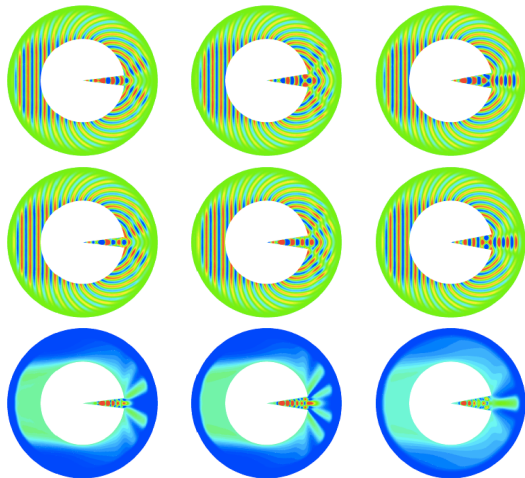


Figure 20: Real part (top), imaginary part (middle), and module (bottom) of the electric field with  $\theta_W = 14.3^\circ$  (left),  $18.5^\circ$  (middle) and  $21.5^\circ$  (right).

# Application to Maxwell....

1 parameter (angle)

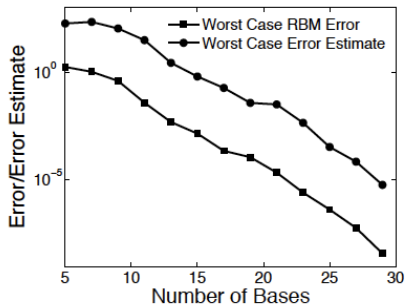


FIG. 3.15. *The worst case convergence history and the corresponding error estimate of the RBM for 120 randomly selected parameter values.*



# Application to Maxwell....

2 parameters (angle and frequency)

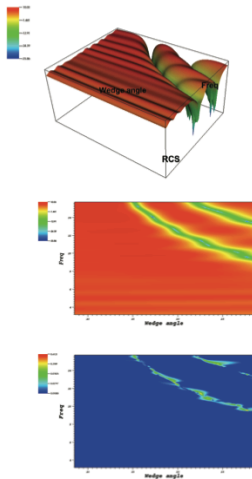


Figure 23:  $RCS(\omega, \theta_W, 0, 0)$  in dB computed by the RBM with EIM for  $\omega \in [\pi, 5\pi]$  and  $\theta_W \in [8.5^\circ, 28.5^\circ]$ . Top: 3D-plot; middle: top view; bottom: point-wise relative error of  $RCS(\omega, \theta_W, 0, 0)$ .