

Description du projet ElastoPhi

soumis au CEMRACS 2016

Acronyme du projet:

Elasto Φ

Titre complet:

Boundary integral methods for elasticity around a crack network

Participants

Le projet s'étendra sur toute la durée du CEMRACS, soit 5 semaines (en plus de la semaine de cours). Le projet impliquera les personnes suivantes.

Deux étudiants:

- Pierre Marchand (INRIA Alpines)
- Marcella Bonazzoli (Université de Nice)

Quatre encadrants:

- Frédéric Nataf (INRIA Alpines/ LJLL UPMC)
- Ibthiel Ben-Gharbia (IFPEN)
- Pierre-Henri Tournier (INRIA Alpines/ LJLL UPMC)
- Xavier Claeys (INRIA Alpines/ LJLL UPMC)

Description scientifique

Cette proposition de projet provient d'un besoin en simulation d'IFPEN pour la résolution d'un problème d'élasto-statique dans un milieu homogène infini représentant le sous-sol et comportant un réseau complexe de fissures. D'un point de vue géométrique, ces fissures peuvent être représentées comme des portions de surface, mais de multiples fissures peuvent s'entrecroiser, l'ensemble admettant ainsi une structure géométrique complexe.

Pour résoudre ce problème, IFPEN a développé un code de calcul basé sur une méthode d'éléments finis de bord (BEM) [8, 9]. Dans cette approche, le problème au limite de départ (élasto-statique) est reformulé comme une équation intégrale dont les inconnues sont des fonctions supportées par les fissures. Il s'agit d'une équation non-locale: chaque (partie de) fissure est couplée avec chacune des autres, même dans le cas de deux fissures éloignées. Cette équation intégrale est alors discrétisée au moyen d'une méthode de Galerkin (comme dans la méthode des éléments finis), ce qui mène systématiquement à une matrice dense du fait de la non-localité de l'opérateur intégral.

Si l'on veut traiter des problèmes de grande taille comme ceux auxquels veut s'intéresser IFPEN, le fait que la matrice du problème soit dense est problématique. En effet, si l'on note N la taille de la matrice, le coût d'un produit matrice vecteur (opération élémentaire centrale dans une résolution numérique) est en $\mathcal{O}(N^2)$. Ce coût n'est pas tolérable, et il est nécessaire de modifier un peu la matrice de manière à réduire la complexité du produit matrice vecteur.

Pour ce faire, l'heuristique utilisée à l'IFPEN consiste à annuler les termes de la matrice correspondant à des interactions entre deux fissures très éloignées l'une de l'autre. Cette approche a pour effet de diminuer la complexité du produit matrice-vecteur, mais dégrade la consistance globale de la méthode d'éléments finis de bord, et ne peut donc être utilisé qu'avec parcimonie.

Objectifs du projet

Le projet CEMRACS ElastoPhi vise à tester, dans ce contexte, l'usage de méthodes de réduction de complexité de type Fast Multipole Method (FMM) [3, 7, 2, 1] ou Adaptative Cross Approximation (ACA) [5, 6, 4] en lieu et place de l'heuristique évoquée plus haut. En effet ces méthodes maintenant éprouvées depuis une vingtaine d'années ont été développées précisément pour répondre à la problématique de réduction de complexité algorithmique lié à la densité des matrices d'éléments finis de bord. Elles permettent de réaliser des produits matrice-vecteur pour un cout de $\mathcal{O}(N \log^p N)$ (avec, dans le pire des cas, $p =$ de l'ordre de 2 ou 3) au lieu de $\mathcal{O}(N^2)$. Cette réduction de complexité se fait bien entendu au prix d'une approximation (c'est un produit matrice-vecteur approché que l'on réalise) mais cette approximation ne dégrade pas l'ordre de consistance global de la méthode BEM.

Deux ingrédients essentiels se trouvent au coeur des méthodes FMM et ACA. D'une part un partitionnement de la matrice du problème selon un découpage qui prend en compte la notion de champ proche/champ lointain. Ce partitionnement est organisé selon une structure de *cluster-tree* (arbre de paquets). D'autre part un algorithme permettant d'approcher chaque bloc du cluster-tree (qui est une sous-matrice dense) par une somme finie de matrices de rang 1 admettant peu de termes.

Les participants du projet auront pour objectif de comparer la vitesse du produit matrice-vecteur tel que réalisé actuellement dans le code de l'IFPEN, avec la vitesse de cette opération lorsqu'elle est réalisée à l'aide d'une bibliothèque FMM ou ACA. La tâche essentielle dévolue aux participants du projet consistera à

- S'approprier une bibliothèque de réduction de complexité et la tester sur des problèmes jouets
- Bien comprendre la mise en équation du problème d'élasto-statique d'IFPEN
- S'approprier, d'un point de vue informatique, les éléments mis à disposition par IFPEN (fichiers de données, briques de code précompilées, etc...)
- Réaliser l'interfaçage de ces éléments avec une bibliothèque de réduction de complexité
- Lancer une batterie d'expériences pour mettre en évidence le gain apporté par les méthodes de réduction de complexité sur la vitesse du produit matrice-vecteur.

Éléments logiciels nécessaires au projet

L'IFPEN mettra à disposition des participants, pour les cas qui l'intéresse, des jeux de données ou des briques de code précompilées (donc sans accès au code source). Ceci vise simplement à mettre à disposition des participants les éléments nécessaires à l'appel d'une librairie de réduction de complexité. Selon une estimation préliminaire et pour chaque cas de calcul, les participants auront besoin de:

- 1) Un fichier de maillage.
- 2) La correspondance entre la numérotation des éléments du maillage (noeuds, arêtes, triangles) et la numérotation des inconnues. Ceci pourra se faire, par exemple, via un fichier de données pour chaque cas considéré, ou bien un jeu de routines précompilées.
- 3) Accès aux éléments de la matrice à nouveau à l'aide d'un fichier de données pour chaque cas considéré, ou bien un jeu de routines précompilées.

Livrables

- Une série de transparents au format PDF synthétisant les développements et les résultats obtenus au cours du projet. Ces transparents seront présentés à la fin du CEMRACS.
- Un court rapport présentant de manière un peu plus détaillée les résultats du projet, et évoquant les voies d'amélioration possibles.

- L'ensemble du code source développé par les étudiants réuni dans une série de fichiers sous licence LGPL, et pouvant être réutilisés par IFPEN.

References

- [1] A.W. Appel. An efficient program for many-body simulation. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 6(1):85–103, 1985.
- [2] J. Barnes and P. Hut. A hierarchical $\mathcal{O}(n \ln n)$ force calculation algorithm. *Nature*, (324):446–449, 1986.
- [3] R. Beatson and L. Greengard. A short course on fast multipole methods. In *Wavelets, multilevel methods and elliptic PDEs (Leicester, 1996)*, Numer. Math. Sci. Comput., pages 1–37. Oxford Univ. Press, New York, 1997.
- [4] M. Bebendorf. *Hierarchical matrices*, volume 63 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag, Berlin, 2008. A means to efficiently solve elliptic boundary value problems.
- [5] S. Börm. *Efficient numerical methods for non-local operators*, volume 14 of *EMS Tracts in Mathematics*. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2010. \mathcal{H}^2 -matrix compression, algorithms and analysis.
- [6] W. Hackbusch. *Hierarchical matrices: algorithms and analysis*, volume 49 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2015.
- [7] V. Rokhlin. Rapid solution of integral equations of classical potential theory. *J. Comput. Phys.*, 60(2):187–207, 1985.
- [8] S.A. Sauter and C. Schwab. *Boundary element methods*, volume 39 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2011. Translated and expanded from the 2004 German original.
- [9] O. Steinbach. *Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems*. Springer, New York, 2008. Finite and boundary elements, Translated from the 2003 German original.