CEMRACS'11: PROJET HOSTO

COMPARAISON DE MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LE CALCUL DE COEFFICIENTS EFFECTIFS EN HOMOGÉNÉISATION STOCHASTIQUE

ANTOINE GLORIA & JEAN-CHRISTOPHE MOURRAT

Le calcul numérique de coefficients effectifs est un problème majeur en homogénéisation stochastique. Nous nous plaçons dans le cas le plus simple où $A(x)$ est une matrice diagonale représentant la conductivité d'un réseau de résistances (typiquement $\mathbb{Z}^d$), chaque entrée de A étant indépendante des autres et suivant le même loi. Pour calculer le coefficient dit homogénéisé, il convient de résoudre l'équation elliptique (discrète)

$$-\nabla^* \cdot A(\nabla\phi + \xi) \,=\, 0 \tag{0.1}$$

dans $\mathbb{Z}^d$ tout entier.

Comme cela n'est pas possible en pratique, des méthodes d'approximation ont été proposées dans la littérature. Cependant, jusque très récemment il n'y avait pas d'analyse d'erreur de ces méthodes. Dans une série de travaux, A. Gloria, J.-C. Mourrat, S. Neukamm et F. Otto ont introduit des outils permettant d'analyser ces méthodes (et d'en proposer d'autres). Trois types de méthodes ont été analysées : la résolution d'une version modifiée de (0.1) sur un domaine borné (par un terme additionnel d'ordre zéro), la méthode de périodisation ((0.1) est résolue sur une boîte avec conditions aux limites périodiques), la simulation d'une marche aléatoire en milieu aléatoire (méthode de Monte-Carlo associée à l'interprétation probabiliste de l'opérateur elliptique $-\nabla^* \cdot A\nabla$). Dans [1]-[7], nous avons analysé ces méthodes et obtenu des taux de convergence optimaux. Chaque méthode a des avantages et inconvénients du point de vue numérique.

Notre analyse, bien qu'optimale en terme de taux de convergence, ne permet pas d'identifier clairement "la meilleure" méthode car nous perdons la trace des préfacteurs. L'objectif de ce projet est de faire une comparaison numérique rigoureuse des différentes approches et d'identifier précisément les avantages et inconvénients de chacune. La plupart des méthodes a déjà été implentée et ces codes pourront servir de point de départ.

Le projet sera encadré par A. Gloria et J.-C. Mourrat.

[1] A. Gloria & F. Otto, An optimal variance estimate in stochastic homogenization of discrete elliptic equations, Ann. Probab.
[2] A. Gloria & F. Otto, An optimal error estimate in stochastic homogenization of discrete elliptic equations, Ann. Appl. Probab.
[3] J.-C. Mourrat, Variance decay for functionals of the environment viewed by the particle, Ann. Inst. H. Poincar Probab. Statist.

Date: 18 mai 2011.

[4] A. Gloria, Numerical approximation of effective coefficients in stochastic homogenization of discrete elliptic equations, preprint.
[5] A. Gloria & J.-C. Mourrat, Spectral measure and approximation of homogenized coefficients, Probab. Theory Related Fields.
[6] A. Gloria & J.-C. Mourrat, Quantitative version of Kipnis-Varadhan's theorem and Monte-Carlo approximation of homogenized coefficients, preprint.
[7] A. Gloria, S. Neukamm & F. Otto, Convergence rate for the approximation of effective diffusion by periodization in stochastic homogenization of discrete elliptic equations, en préparation.

(Antoine Gloria) Projet SIMPAF, INRIA Lille-Nord Europe, France
E-mail address: antoine.gloria@inria.fr

(Jean-Christophe Mourrat) EPFL, Lausanne, Suisse
E-mail address: jean-christophe.mourrat@epfl.ch