

Sujet CEMRACS 2011

Discrétisation d'un modèle bas Mach adapté à la modélisation simplifiée d'un cœur de réacteur nucléaire à eau

Stéphane Dellacherie¹ et Yohan Penel²

¹CEA-Saclay
stephane.dellacherie@cea.fr

²INRIA-Lille
yohan.penel@inria.fr

Résumé

Le projet proposé consiste dans un premier temps à dériver, à étudier puis à tester divers schémas numériques en 1D appliqués à la résolution numérique d'un modèle bas Mach simplifié d'un cœur de réacteur nucléaire à eau. Dans un second temps, il s'agira de choisir une approche numérique parmi celles étudiées en 1D pour l'appliquer en 2D en adaptant un code incompressible à densité variable développé par l'équipe SIMPAF de l'INRIA-Lille.

Contexte général

Le sujet proposé a pour objectif l'étude et la discrétisation du modèle bas Mach

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\beta}{P_0} \Phi, & \text{(a)} \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla \Pi + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \tau(u), & \text{(b)} \\ \rho C_p(\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T) = \Phi(t, x) & \text{(c)} \end{cases} \quad (1)$$

avec $(t, x) \in [0, +\infty[\times \Omega$ où $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3] \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine borné cubique ($x := (x_1, x_2, x_3)$). Le système (1) est fermé avec

$$\begin{cases} \beta(T, P_0) := \frac{\alpha P_0}{\rho C_p}(T, P_0), \\ \alpha(T, P_0) := -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}(T, P_0) = \text{coefficient de compressibilité à pression constante.} \end{cases}$$

Dans (1), $\Phi(t, x)$ est une densité de puissance supposée connue. D'autre part, ρ est la densité, C_p est la capacité calorifique à pression constante, T est la température, P_0 est une constante positive (qui définit la pression thermodynamique moyenne dans Ω), \mathbf{u} est la vitesse, Π est la pression dynamique et $\mathbf{g} := (0, 0, -1)g$ est la gravité (g est une constante strictement positive). Par ailleurs, $\tau(u)$ est le tenseur de viscosité défini avec

$$\tau(\mathbf{u}) = \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + \eta(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I}$$

où μ est la viscosité et où η est tel que $2\mu + 3\eta = 0$ (hypothèse de Stokes). Les fonctions $\rho(T, P_0)$ et $C_p(T, P_0)$ sont déduites des équations d'état du fluide et sont donc supposées connues.

On munit par ailleurs le système (1) des conditions aux limites d'entrée

$$\begin{cases} \forall x \in [0, L_1] \times [0, L_2] \times \{0\} : h(t, x) = h_e, & \text{(a)} \\ \rho \mathbf{u}(t, x) = ((\rho u)_e, 0, 0) & \text{(b)} \end{cases} \quad (2)$$

et de la condition aux limites de sortie

$$\forall x \in [0, L_1] \times [0, L_2] \times \{L_3\} : \Pi(t, x) = P_0 \quad (3)$$

où $(\rho u)_e$ est le flux massique (positif) d'entrée et où h_e est l'enthalpie interne d'entrée dans Ω . On munit également le système (1) de conditions aux limites sur les parois latérales du réacteur¹. Ces conditions aux limites sont fixées selon que l'on néglige ou non la viscosité μ du fluide :

$$\text{Si } \mu := 0: \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur les parois latérales} \quad (4)$$

(\mathbf{n} est la normale extérieure à $\partial\Omega$)

¹C'est à dire sur les surfaces qui ne sont ni la surface d'entrée, ni la surface de sortie.

ou

$$\text{Si } \mu \neq 0: \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur les parois latérales.} \quad (5)$$

Enfin, on munit le système (1) de la condition initiale

$$\begin{cases} T(t = 0, x) = T_0(x), \\ \mathbf{u}(t = 0, x) = \mathbf{u}_0(x) \end{cases}$$

où T_0 vérifie la condition aux limites (2)(a) (*i.e.* $h(T_0(x), P_0) = h_e$ sur la surface d'entrée, $h(T, P_0)$ étant déduite des équations d'état du fluide), et où \mathbf{u}_0 vérifie la contrainte (1)(a) et les conditions aux limites (2)(b)-(4) ou (2)(b)-(5).

Le système (1) est un système dit *bas Mach* qui se déduit, sous l'hypothèse que le nombre de Mach est petit, d'un système compressible dans lequel les ondes acoustiques ont été filtrées (voir par exemple [1]). Il dégénère par ailleurs vers un système incompressible lorsque la source de chaleur Φ est nulle.

Lorsque $\Phi(t, x)$ est une densité de puissance positive liée à des réactions de fission et lorsque les équations d'état incorporent le caractère diphasique liquide-vapeur à l'instar du modèle utilisé dans [3], le système (1) modélise de façon simplifiée le chauffage dans un cœur de réacteur nucléaire de type REP² (de frontière $\partial\Omega$) du fluide caloporteur (l'eau ici) et les transferts de chaleur du cœur vers l'extérieur *via* ce fluide. Notons que dans le cas d'un réacteur embarqué, on pourra faire varier la direction de la gravité dans le modèle (1) en posant $\mathbf{g} := -(n_1(t), n_2(t), n_3(t))g$ où les $n_k(t)$ supposés connus définissent l'orientation du champ de gravité par rapport au réacteur.

Le travail proposé se décompose en deux parties :

- une 1^{ère} partie axée sur le cas 1D ;
- une 2^{ème} partie axée sur le cas 2D (voire 3D).

Partie I

Dans un 1^{er} temps, on se propose de tester diverses stratégies de discrétisation en 1D du système (1) lorsque le fluide est un gaz parfait et que la fonction Φ positive ne dépend que de l'espace (et est intégrable sur $\Omega := [0, L]$). Dans ce cas, la gravité est donnée par $\mathbf{g} = (0, 0, -1)g$ où le vecteur $(0, 0, 1)$ définit la direction 1D considérée. L'intérêt de ce cas simplifié est qu'il est alors possible d'obtenir une solution analytique stationnaire de (1) (en particulier lorsque Φ ne dépend pas non plus de l'espace).

²REP = Réacteur à Eau sous Pression.

Soulignons tout d'abord que (1) s'écrit également

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\beta}{P_0} \Phi, & \text{(a)} \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla \Pi - \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}), & \text{(b)} \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. & \text{(c)} \end{cases} \quad (6)$$

Objectifs principaux de l'étude 1D :

L'un des objectifs de cette étude 1D est de mesurer l'intérêt ou le non-intérêt de résoudre (6)(c) au lieu de (1)(c) pour ce qui touche notamment :

- **à la préservation de la positivité de T** (et donc de ρ puisque $\rho = \rho(T, P_0)$). On notera qu'il est assez aisé de préserver la positivité de ρ (et donc de T) sous critère CFL standard lorsque l'on résout l'équation (6)(c) avec un schéma décentré amont d'ordre 1 alors que le terme source dans l'équation (1)(a) peut introduire une contrainte additionnelle sur le pas de temps³. On pourra d'ailleurs réfléchir à l'existence d'une discrétisation de (1)(c) rendant équivalente au niveau discret en espace les formulations (1)(c) et (6)(c) (voir à ce sujet le §3.3.2 dans [2] pour le cas où Φ est remplacé par un terme de conduction thermique) ;
- **à la prise en compte de la condition aux limites (2) au niveau discret.** On notera que la formulation (6)(c) semble *a priori* plus adaptée que la formulation (1)(c) pour la prise en compte de la condition aux limites (2)(b) avec un schéma de type volume fini.
- **à la préservation d'états d'équilibre discrets** déduits des solutions analytiques stationnaires (au moins dans le cas simple $\frac{d}{dx} \Phi(x) = 0$). Ce point nous semble important pour assurer la convergence de la solution de (1) vers un régime stationnaire discret. On pourra d'ailleurs envisager d'étudier d'un point de vue théorique la convergence vers ces équilibres discrets dans le cas semi-discret (*i.e.* continu en temps, discret en espace).

Stratégies numériques 1D éventuelles :

Parmi les stratégies numériques possibles, on s'attachera à étudier en gardant à l'esprit les trois objectifs principaux indiqués précédemment :

- une version 1D du schéma hybride éléments finis (EF) / volumes finis (VF) [4, 5] appliqué au système (6). Dans [4, 5], (6)(a,b) est résolu avec un schéma de type EF, et (6)(c) est résolu avec un schéma de type VF d'ordre 2 qui préserve la positivité de ρ sous critère CFL standard ;

³Cette remarque serait d'autant plus vraie si l'on tenait compte de la conduction thermique dans (1).

- une version 1D instationnaire du schéma colocalisé proposé dans [6] appliqué à (1) ou (6) ;
- un schéma décalé de type MAC appliqué à (1) ou (6).

Notons que pour résoudre (1)(c), l'on pourra aussi tester le schéma de type MOC d'ordre 2 proposé dans [7] mais en tenant compte du fait que ce schéma sera difficilement applicable en 2D ou 3D sur maillage quelconque.

Un point important ici consistera à bien prendre en compte la contrainte

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\beta}{P_0} \Phi$$

en notant que les schémas proposés dans [4, 5, 6] sont basés sur la contrainte d'incompressibilité

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Influence de nombres sans dimension sur les solveurs 1D :

On étudiera l'influence éventuelle du coefficient sans dimension dit *coefficient de chauffage*

$$C_{chauffage} := \frac{\bar{\Phi}L}{P_0 u_e} \quad (7)$$

sur la robustesse et la précision des solveurs 1D étudiés ainsi que sur le temps CPU de convergence vers un équilibre discret. Dans (7), $\bar{\Phi}$ est un ordre de grandeur de $\Phi(x)$ défini par exemple avec $\bar{\Phi} := \frac{1}{L} \int_0^L \Phi(x) dx$.

On pourra étudier la même question pour ce qui touche au nombre sans dimension dit *nombre de Froude*

$$F_r = \frac{u_e^2}{gL}.$$

Il serait intéressant de voir dans quelle mesure les solveurs 1D étudiés sont plus sensibles à $C_{chauffage}$ qu'à F_r (ou réciproquement).

L'ensemble de ces résultats sera comparé avec ceux obtenus à partir d'un solveur compressible 1D fourni dans le cadre de ce projet.

Enrichissement du modèle :

Le cas de la densité de puissance $\Phi(t, x)$ *instationnaire* pourra être étudié d'un point de vue expérimental. Ce cas simulera par exemple la montée en puissance (progressive ou brutale) d'un cœur ou, au contraire, son arrêt (progressif ou brutal). Dans le même esprit, on pourra aussi étudier le comportement des solveurs 1D lorsque la gravité g et/ou la vitesse d'entrée u_e sont des fonctions connues dépendant du temps.

Partie II

Dans un 2^{ème} temps, on s'attachera à mener une réflexion sur la résolution en 2D (voire en 3D) du système (1) – ou de sa forme équivalente (6) – sur maillage cartésien en tenant compte de l'expérience acquise en 1D. On cherchera alors à implémenter le solveur 2D jugé le plus adapté dans un code incompressible à densité variable développé par l'équipe SIMPAF de l'INRIA-Lille [4, 5]. Le cas de maillages plus complexes pourra être abordé en fonction du temps disponible (en particulier le cas d'un maillage cartésien non-conforme).

References

- [1] Dellacherie S. – *On a diphasic low Mach number system* – Math. Model. and Num. Anal., **39**(3), pp. 487-514, 2005.
- [2] Dellacherie S. – *Numerical resolution of a potential diphasic low Mach number system* – J. of Comp. Phys., **223**(1), pp. 151-187, 2007.
- [3] Clerc S. – *Numerical Simulation of the Homogeneous Equilibrium Model for Two-Phase Flows* – J. of Comp. Phys., **161**(1), pp. 354-375, 2000.
- [4] Calgario C., Creusé E. et Goudon T. – *An hybrid finite volume-finite element method for variable density incompressible flows* – J. of Comp. Phys., **227**(9), pp. 4671-4696, 2008.
- [5] Calgario C., Creusé E. et Goudon T. – *L^∞ -stability of vertex-based MUSCL finite volume schemes on unstructured grids: Simulation of incompressible flows with high density ratios* – J. of Comp. Phys., **229**(17), pp. 6027-6046, 2010.
- [6] Chénier E., Eymard R. and Herbin R. – *A collocated finite volume scheme to solve free convection for general non-conforming grids* – J. of Comp. Phys., **228**, pp. 2296-2311, 2009.
- [7] Penel Y. – *Étude théorique et numérique de la déformation d'une interface séparant deux fluides non-miscibles à bas nombre de Mach* – Thèse de l'Université Paris 13, 2010.