

## Projet CEMRACS 2011

**Titre :** SCHEMAS VOLUMES FINIS ET STRATEGIES EN TEMPS. APPLICATION AU COUPLAGE HYDRO-SEDIMENTAIRE.

**Co-encadrants :** E. Audusse (Projet BANG - INRIA Paris-Rocquencourt et UPMC ; LAGA - Université Paris Nord), J. Sainte-Marie (Projet BANG - INRIA Paris-Rocquencourt et UPMC) et N. Goutal (EDF - LNHE)

**Financement :** Projet PEPS (CNRS-INSMI)

**Contexte de l'étude :** Des progrès importants ont été réalisés durant les dernières années dans la simulation numérique des écoulements géophysiques. Les équations de Saint-Venant, souvent au coeur de ces modélisations, forment un système hyperbolique de lois de conservation avec termes sources modélisant l'évolution de la hauteur d'eau  $h(t, \mathbf{x})$  et de la vitesse moyenne de la colonne d'eau  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  dans l'écoulement

$$\begin{aligned}h_t + \nabla \cdot (hu) &= 0, \\(hu)_t + \nabla \cdot (hu \otimes u) + \frac{1}{Fr^2} \nabla \left( \frac{h^2}{2} \right) &= -gh \nabla z_b,\end{aligned}$$

où  $z_b(\mathbf{x})$  désigne la cote du fond du bassin et  $g$  la constante de pesanteur, la variable  $\mathbf{x}$  prenant ses valeurs dans le plan puisque la dimension verticale a été supprimée grâce à un processus d'intégration entre le fond et la surface libre. Elles ont été abondamment étudiées par de nombreux auteurs dans la dernière décennie (voir par exemple [7] pour une revue assez complète) : dérivation depuis les équations de Navier-Stokes incompressible à surface libre tridimensionnelle (ce qui a permis de mieux connaître leur domaine de validité et de préciser la forme de certains termes), analyse théorique (caractère bien posé sous diverses hypothèses) et analyse numérique (développement de nombreux schémas aux propriétés intéressantes : positivité, entropie, "well-balancing" pour différents termes sources, schémas "asymptotic preserving"). Ces progrès permettent maintenant d'envisager de nouvelles étapes. Nous proposons ici de nous intéresser plus particulièrement aux

problèmes de transport de sédiments et d'évolution morphologique du fond des bassins incluant des processus d'érosion. Ces phénomènes hydro-sédimentaires sont en effet d'une importance capitale pour de nombreuses applications : enlèvement des ports, obstruction des circuits de refroidissement des centrales, qualités de l'eau lors de la vidange des barrages, phénomènes de crues brutales. Dans la modélisation de ce type de problèmes, le modèle fluide est alors couplé avec une équation de transport (pour la partie sédiment en suspension) et un modèle d'érosion qui modélise l'évolution de la cote du fond du bassin. A titre d'exemple, nous donnons ici l'équation d'Exner avec flux de Grass

$$(z_b)_t + \nabla Q_b = 0, \quad Q_b = A||u||^{m-1}u$$

où  $A(x)$  est un paramètre caractérisant l'interaction entre le sol et l'écoulement, voir par exemple [1, 2] pour plus de détails.

**Description du sujet :** Les phénomènes hydro-sédimentaires se caractérisent par la présence d'échelles de temps qui peuvent être très différentes : ondes acoustiques, phénomènes de transport des sédiments en suspension et évolution morphologique du fond du bassin ont des temps caractéristiques distincts, souvent séparés par plusieurs ordres de grandeur. Il résulte de cette observation que les schémas volumes finis explicites classiques, limités par une condition de CFL souvent très restrictive car liée aux ondes les plus rapides, sont rarement adaptés à ces problèmes. Plusieurs solutions peuvent être envisagées : l'utilisation de schémas implicites ou semi-implicites [3], le développement de schémas qui s'adaptent automatiquement aux différents temps caractéristiques présents dans le problème, par exemple en implicitant une partie seulement des équations [5, 4], l'utilisation de schémas complètement explicites, mais utilisant la possibilité de ne décentrer qu'une partie du flux numérique [6]... La compréhension de ces travaux et leur utilisation dans le cadre décrit seront au coeur du projet proposé.

## References

- [1] G. Antoine, Validation du code hydro-sédimentaire 1D COURLIS, Rapport interne EDF, 2010. [http://engees-proxy.u-strasbg.fr/539/01/ANTOINE\\_rapport.pdf](http://engees-proxy.u-strasbg.fr/539/01/ANTOINE_rapport.pdf)
- [2] Benkhaldoun F, Sahmim S, Seaid M, Solution of the Sediment Transport Equations using a Finite Volume Method based on Sign Matrix. SIAM J. Sci. Comp., 31, 2866–2889. 2009.

- [3] M. Bilanceri, F. Beux, H. Guillard, M. Vittoria Salvetti, I. Elmahi, Comparison of Explicit and Implicit Time Advancing in the Simulation of a 2D Sediment Transport Problem, FVCA 6 Proceedings, 2011.
- [4] C. Chalons, F. Coquel, S. Kokh, N. Spillane, Large time-step numerical scheme for the seven-equation model of compressible two-phase flows, FVCA 6 Proceedings, 2011.
- [5] F. Coquel, Q. L. Nguyen, M. Postel, and Q. H. Tran. Local time stepping applied to implicit-explicit methods for hyperbolic systems, Multiscale Model. Simul., 8, 540-570. 2010
- [6] S. Dellacherie, Analysis of Godunov type schemes applied to the compressible Euler system at low Mach number. J. Comp. Phys., 229(4), 978-1016. 2010.
- [7] F. Marche, Theoretical and Numerical study of shallow water models. Applications to nearshore dynamics. Thèse de l'Université de Bordeaux, 2005. <http://www.math.u-bordeaux1.fr/marche/>