# Application des méthodes Galerkin-discontinues aux équations de Vlasov

**Résumé**
Un travail récent [1] propose une analyse mathématique de la méthode de Galerkin-discontinue (GD) pour l'équation de Vlasov. Ce projet consiste à tester pratiquement cette méthode et à la comparer aux méthodes semi-Lagrangiennes (taux d'instabilité, conservations...).

**Sujet**
L'équation de Vlasov est un modèle cinétique qui décrit l'évolution d'une fonction de distribution $f = f(t, x, v)$ avec $t$ le temps, $x$ la variable spatiale, et $v$ la variable de vitesse, sous l'effet d'un champ moyen $E = E(t, x)$ (généré par les particules elles-mêmes via l'équation de Poisson $\partial_x E = \int_{\mathbb{R}} f dv - 1$)

$$\partial_t f + v\partial_x f + E\partial_v f = 0. \tag{1}$$

Deux grandes familles de schémas numériques existent pour discrétiser l'équation (1) : les méthodes Particle In Cell d'une part et les méthodes euleriennes d'autre part. Ce projet se place dans la deuxième catégorie puisqu'on se propose d'utiliser une grille de l'espace des phases $(x, v)$ à travers l'approche GD.
Développées depuis quelques années, les méthodes GD présentent de nombreux avantages : propriétés de conservation locale, utilisation de maillages irréguliers, localité de la reconstruction, coût numérique... (voir [2, 3]). Le but de ce projet est d'implémenter et de tester ces méthodes sur l'équation de Vlasov afin de les comparer aux méthodes semi-Lagrangiennes ou volumes finis. En particulier, les résultats mathématiques de [1] seront validés (estimation de l'erreur en fonction du degré de la reconstruction polynomiale, conservation de l'énergie totale,...).
Une extension possible de ce travail consiste à appliquer les méthodes GD à l'équation centre-guide satisfaite par la densité $\psi = \psi = \psi(t, x, y)$ et le champ électrique $E = E(t, x, y)$

$$\partial_t \psi + E^{\perp} \cdot \nabla\psi = 0, \quad -\nabla \cdot E = \psi.$$

L'intérêt réside dans le fait que cette équation peut mettre en jeu des conditions aux bords de type Dirichlet dans la direction $y$. Les méthodes GD permettent une approximation faible des conditions aux bords, ce qui semble attractif pour ce genre de problème par rapport aux méthodes semi-Lagrangiennes.

**<u>Contact : Eric Sonnendrücker</u>**
IRMA, Université de Strasbourg
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg
Tel : 03.68.85.02.71
email : sonnen@math.unistra.fr

## Références

[1] B. Ayuso, J.A. Carrilo, C.W. Shu, *Discontinuous Galerkin methods for the one-dimensional Vlasov-Poisson system*, preprint UAB.

[2] J.S. Hesthaven, T. Warburton, *Nodal discontinuous Galerkin methods : Algorithm, analysis and applications*, Springer Texts in Applied Mathematics 54, Springer Verlag, New York, 2008.

[3] C.W. Shu, *Discontinuous Galerkin methods : general approach and stability*, Numerical solutions of partial differential equations, Adv. Courses Math. CRM Barcelona, pp. 149-201, Birkhaüser, Basel, 2009.