# Mécanique des matériaux aléatoires, mécanique en domaine aléatoire

Régis LEBRUN, regis.lebrun@eads.net

20 juin 2006

## 1 Présentation

L'objectif du thème de recherche est d'étudier certains aspects probabilistes du système d'EDPs de l'élasticité linéaire lorsque la relation de comportement prend un caractère aléatoire ou lorsque le domaine géométrique sur lequel est posé le problème est soumis à des variations aléatoires.

Le systèmes d'EDPs régissant le comportement statique élastique linéaire d'une structure s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} + \rho\boldsymbol{f} = 0 & \text{sur } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\epsilon} & \text{sur } \Omega \\ \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla u} + \boldsymbol{\nabla^t u}) & \text{sur } \Omega \\ \boldsymbol{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g} & \text{sur } \Gamma_2 \\ \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \{\Gamma_1 \cup \Gamma_2\} \end{array}\right. \tag{1}$$

où :
- $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes vérifiant $\forall i, j\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$,
- $\rho$ est la masse volumique,
- $\boldsymbol{f}$ est le vecteur des forces volumiques appliquées,
- $\ddot{\boldsymbol{u}}$ est le vecteur accélération,
- $\boldsymbol{\epsilon}$ est le tenseur des déformations linéarisées,
- $\boldsymbol{A}$ est le tenseur d'élasticité vérifiant $\forall i, j, k, l\ A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{jilk}$,
- $\boldsymbol{g}$ est l'effort externe appliqué.

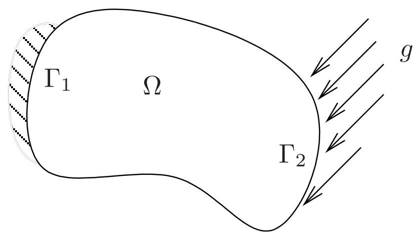


Fig. 1 – Géométrie et conditions aux limites du problème

Dans la suite de l'étude, le champ scalaire $\rho$ est supposé *constant spatialement*, au contraire du champ tensoriel $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ qui est une fonction de la position $\boldsymbol{x}$.

## 2 Thème 1 : Modélisation de matériaux hétérogènes aléatoires.

On s'intéresse à une famille $(\Omega_n)_{n\in\{1,\ldots,N\}}$ de pièces mécaniques de géométrie identique, constituées d'un même matériau composite, c'est-à dire constitué d'une résine dans laquelle sont noyées de courtes fibres de carbone. Lors de la polymérisation de la résine par chauffage, les fibres de carbone sont piégées dans la résine en adoptant une direction aléatoire. Si on réalise une campagne d'essais de traction telle que décrite sur la figure 2, on constate une forte dispersion des résultats bien que les pièces aient été réalisées selon le même procédé. L'objectif du premier thème d'étude est de proposer une modélisation stochastique raisonnable de cette expérience.

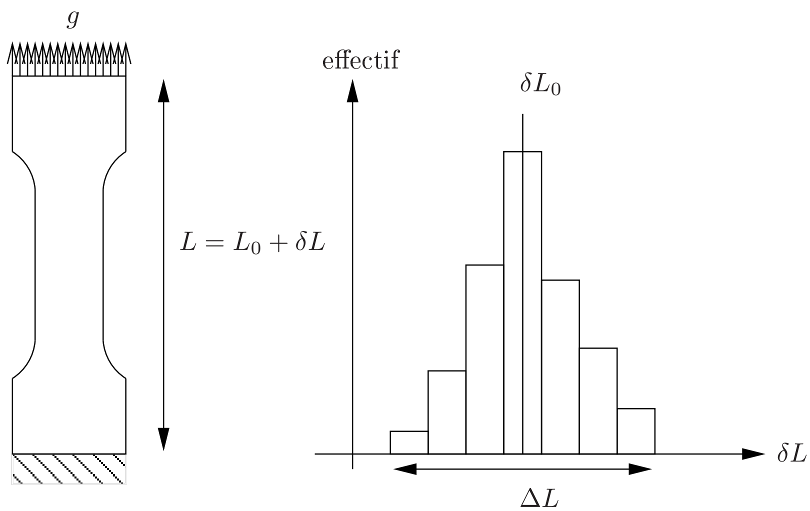


FIG. 2 – Essai de traction à effort $g$ imposé. On mesure la longueur $L$ de l'éprouvette à l'équilibre, toutes les éprouvettes ayant la même longueur initiale $L_0$. La dispersion $\Delta L$ est de l'ordre de la déformation moyenne observée $\delta L_0$.

## 2.1 Tenseur d'élasticité globalement aléatoire

Le tenseur $\boldsymbol{A}$ est aléatoire, i.e. c'est un champ stochastique $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, \omega)$ qu'on décompose sous la forme d'une composante déterministe et d'une fluctuation aléatoire $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, \omega) = \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\delta A}(\boldsymbol{x}, \omega)$. On cherche à faire une analyse de la tendance centrale des résultats de l'expérience de traction, en vue de certifier un procédé de fabrication.

- Quelles sont les conditions mathématiques sur $\boldsymbol{\delta A}$ pour que le problème stochastique soit bien posé ? Bien évidemment, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{A}_0$ vérifiant les conditions de symmétrie d'un tenseur d'élasticité, il en est de même de $\boldsymbol{\delta A}$.
- Quelles sont les caractéristiques essentielles de la perturbation $\boldsymbol{\delta A}$ par rapport à l'analyse qui est menée ?
- Proposer une procédure statistique d'identification de ces caractéristiques.
- Quelles méthodes numériques peut-on mettre en œuvre pour résoudre le problème posé ? Proposer une hiérarchisation.
- Illustrer les méthodes numériques les plus pertinentes par un prototype informatique implémentant le cas 2D à l'aide du logiciel FreeFem++ et/ou Scilab.

## 2.2 Tenseur d'élasticité localement aléatoire

On suppose que le domaine $\Omega$ comporte des parties «épaisses» dans lesquelles le caractère aléatoire de $\boldsymbol{A}$ ne se manifeste pas de façon sensible, alors que dans d'autres parties de $\Omega$ l'influence du terme $\boldsymbol{\delta A}$ est notable, voire la figure 3. On cherche une méthode de type décomposition de domaine permettant de traiter les parties épaissent par une méthode d'éléments finis déterministe, alors qu'on traite les parties minces par une des méthodes identifiées dans la section précédente.

- Comment raccorder les différents domaines ?

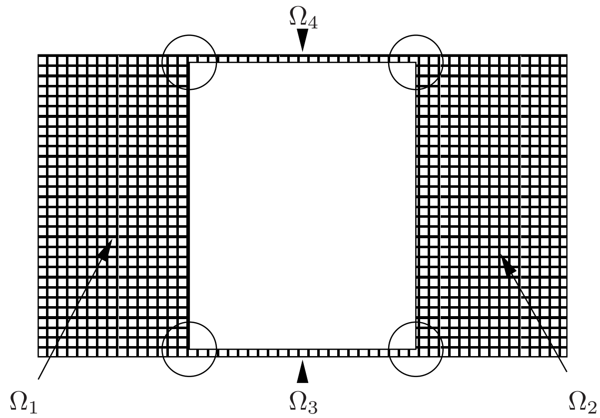


FIG. 3 – Domaine alternant les parties épaisses ($\Omega_1$, $\Omega_2$), les parties minces ($\Omega_3$, $\Omega_4$) et les zones de raccord associées

- Décrire la méthode numérique préconisée en détail.
- Mette en œuvre la méthode numérique préconisée sur un cas 2D à l'aide du logiciel FreeFem et/ou Scilab.

# 3 Thème 2 : Modélisation mécanique élastique linéaire sur un domaine aléatoire.

Pour ce thème de recherche, on suppose que le tenseur d'élasticité est déterministe et tel que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\epsilon} = \lambda \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}$ (matériau isotrope), où $\lambda$ et $\mu$ sont des réels positifs.

On souhaite modéliser les défauts géométriques de fabrication en rendant aléatoire le domaine $\Omega$ sur lequel est posé le problème 1 : on suppose que le domaine peut s'écrire $\Omega(\omega) = \phi_\omega(\Omega_0)$ avec $\phi$ «proche» de l'application identité, le domaine $\Omega_0$ étant régulier. On souhaite déterminer la valeur moyenne et la dispersion du champ $\boldsymbol{u}$.

- Proposer une norme adaptée pour quantifier la proximité de $\phi$ et de l'identité.
- En décomposant $\phi$ sur une base adaptée à déterminer (type déformées modales ou autre), faire le lien entre la dispersion de $\boldsymbol{u}$ et les composantes de $\phi$ (vitesse de décroissance ?).
- Proposer une méthode numérique pour calculer les caractéristiques demandées sur $\boldsymbol{u}$.
- Prototyper la méthode numérique en FreeFem++/Scilab pour des géométries simples (rectangle, ellipse).