Prise en compte de l'aléatoire dans les problèmes d'optimisation

Corporate Research Center EADS Applied Mathematics Group
F. Mangeant, R. Lebrun, P. Rabbat

4 juillet 2006

1 Optimisation sous contraintes aléatoires

1.1 Introduction

L'optimisation sous contraintes est un des outils nécessaires à la résolution de nombre de problèmes industriels. Par exemple, lors des phases de définition des avant-projets aéronautiques, trouver les paramètres physiques et géometriques d'un avion (masse, coefficient de pénétration dans l'air, vitesse, etc.)qui minimisent la consommation en carburant sous un certain nombre de contraintes (par exemple, la masse doit être bornée par un certain seuil). Si la fonction coût (consommation de carburant en fonction des paramètres) est relativement bien connue, il en va autrement des contraintes, qui sont le plus souvent issues d'expériences et de mesures et présentent donc une variabilité significative. Nous proposons donc de modéliser cet aléa dans les contraintes en attribuant aux contraintes une certaine loi de probabilité ; la conséquence en est que le domaine sur lequel on doit résoudre notre problème d'optimisation est de forme aléatoire.

1.2 Modélisation du problème

Nous notons $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des paramètres physiques, $\mathcal{C}(\underline{x})$ la fonction coût dont on cherche un minimiseur et $\underline{c}(\underline{x}, \underline{\Lambda}) \leq 0$ l'ensemble des inégalités qui représente les contraintes (linéaires ou non linéaires) sur $\underline{x}$ et qui dépendent d'un vecteur de paramètres $\underline{\Lambda} \in \mathbb{R}^m$ aléatoire de loi jointe connue $f_{\underline{\Lambda}}$. De fait, l'espace admissible $\mathcal{D}_{\underline{\Lambda}} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n | \underline{c}(\underline{x}, \underline{\Lambda}) \leq 0\}$ est aléatoire. On se donne enfin un niveau de risque α. Le problème d'optimisation que nous

nous proposons de résoudre est le suivant. On cherche à déterminer :

$$\begin{array}{c} argmin \;\; \mathcal{C}(\underline{x}) \\ \underline{x} \in H_{1-\alpha} \end{array}$$

Le domaine $H_{1-\alpha}$ est un sous-domaine de l'espace physique où l'on est sûr que les contraintes sont vérifiées au moins au niveau $1-\alpha$. Il est défini comme suit :

$$\begin{array}{rcl} H_{1-\alpha} & = & \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbb{P}\left(\underline{x} \in \mathcal{D}_{\underline{\Lambda}}\right) \geq 1-\alpha \right\} \\ & = & \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n | \int_{\underline{c}(\underline{x},\underline{\lambda}) \leq 0} f_{\underline{\Lambda}}(\underline{\lambda}) d\underline{\lambda} \geq 1-\alpha \right\} \\ & = & \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n | \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{1}_{\{\underline{c}(\underline{x},\underline{\lambda}) \leq 0\}} f_{\underline{\Lambda}}(\underline{\lambda})\, d\underline{\lambda} \geq 1-\alpha \right\} \end{array}$$

1.3 Objectifs techniques

Tout d'abord, on cherche à avoir une idée du type de domaine sur lequel se fera l'optimisation (discret, continu, convexe, borné ?). Cette question est déterminante pour le choix de la méthode d'optimisation. Il s'agit ensuite de s'assurer de l'existence d'une solution du problème d'optimisation et de son éventuelle unicité. Enfin, il faut mettre en place des méthodes numériques suffisamment efficaces pour calculer avec une précision suffisante ce minimiseur, ainsi que l'intégrale qui définit $H_{1-\alpha}$. Les contraintes $\underline{c}(\underline{x}, \underline{\Lambda})$ peuvent éventuellement être non linéaires.
Une fois ces calculs effectués, on s'intéresse également à l'analyse de sensibilité vis-à-vis des variables aléatoires :

$$\frac{\partial \mathbb{P}\left(\underline{x} \in \mathcal{D}_{\underline{\Lambda}}\right)}{\partial \Lambda_i}$$

Quelques caractéristiques du type de problème envisagé : $n \approx 10$, $\alpha \in [0.01; 0.1]$, $m \approx 30$.

1.4 Travail envisagé

EADS fournira sous forme de scripts scilab les fonctions de contrainte $((\underline{x}, \underline{\Lambda}) \mapsto \underline{c}(\underline{x}, \underline{\Lambda}))$, la fonction coût $\mathcal{C}(\underline{x})$, ainsi que $f_{\underline{\Lambda}}$.
Le travail attendu est le suivant :

- **Analyse théorique du problème :** Caractéristiques mathématiques, conditions de stabilité, etc ...
- **Analyse numérique du problème :** Choix des méthodes numériques pertinentes, stratégie de résolution, ...
- **Prototype informatique :** Démonstration via un prototype Scilab (version 4.0).

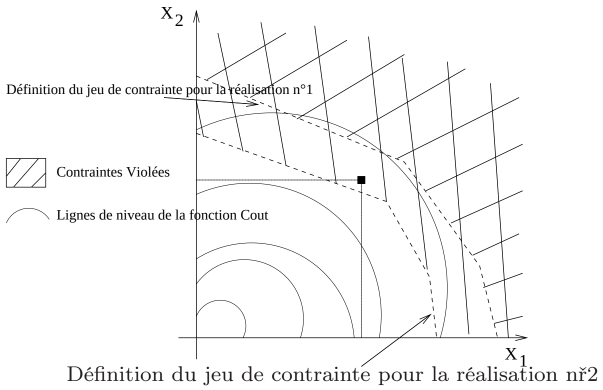

FIG. 1 – Optimisation sous contrainte aléatoire

2 Optimisation d'un paramètre aléatoire

2.1 Introduction

Dans cette partie, on s'intéresse à l'optimisation d'un paramètre aléatoire. Il s'agit typiquement d'une problématique de production.Dans ce cas, les contraintes et la fonction coût du problème d'optimisation sont presque parfaitement connues (elles sont considérées déterministes dans la modélisation). Il en va ainsi de nombreux exemples dans la production : une machine qui produit une pièce, doit être réglée de telle sorte que son débit soit maximal sous un certain nombre de contraintes (de consommation d'énergie, de synchronisation avec les autres machines sur la ligne, etc...). L'aléa vient du fait que la machine ne suivra pas précisément le réglage nominal indiqué par l'opérateur (et issu du problème d'optimisation) mais aura au contraire une variabilité intrinsèque (dûe par exemple au manque de finesse dans la conception de la machine). Si on optimise sans prendre en compte la variabilité, il est très vraissemblable d'avoir un taux de rebut très élevé. Le schéma suivant illustre cette situation.

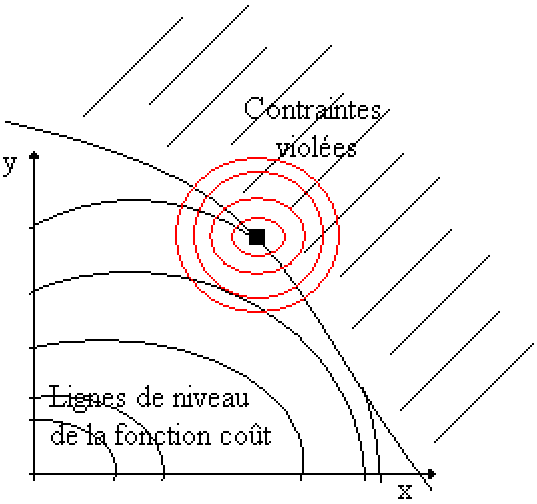

FIG. 2 – Le point noir est l'optimum calculé de manière déterministe. En rouge sont representées les lignes de niveau de la distribution de probabilité de (x, y), et on voit bien qu'il y a une probabilité significative de se trouver dans la zone où les contraintes sont violées.

2.2 Modélisation

On note $\underline{x}$ le vecteur des paramètres physiques "moyens" ou nominaux (qui vit dans $\mathbb{R}^n$) dont on cherche une valeur qui optimise la fonction coût $\mathcal{C}$ sous l'ensemble de constraintes $\underline{c}(\underline{x}) \leq 0$. On note $\underline{X}$ la variable aléatoire centrée en $\underline{x}$ de loi de densité $f(\cdot - \underline{x})$ (f est centrée). Comme dans le précédent problème d'optimisation sous contraintes, il faut se fixer un niveau de risque α tel que la probabilité que $\underline{x}$ soit dans l'espace admissible vaut $1-\alpha$, c'est à dire :

$$\mathbb{P}\left(\underline{c}(\underline{X}) \leq 0\right) \geq 1 - \alpha$$

Si on note $P_f(\underline{x})$ cette probabilité, la condition précédente s'écrit alors

$$\begin{array}{rcl} P_f(\underline{x}) & \geq & 1 - \alpha \\ & \geq & \int_{\underline{c}(\underline{u}) \leq 0} f(\underline{u} - \underline{x}) d\underline{u} \end{array}$$

Le problème d'optimisation se formule alors ainsi :

$$\begin{array}{c} \text{argmin} \quad \mathcal{C}(\underline{x}) \\ P_f(\underline{x}) \geq 1 - \alpha \end{array}$$

2.3 Objectifs

Les difficultés mathématiques et numériques sont ici les mêmes que celles liées au problème précédent (calcul de $P_f(\underline{x})$). De plus, il faut pouvoir choisir une méthode numérique de résolution du problème d'optimisation, ce qui ne peut se décider que si l'on a une idée de la régularité de la fonction $\underline{x} \mapsto P_f(\underline{x})$. Par ailleurs, il semble que ce problème soit le dual du problème précédent dans un sens qui reste à préciser. Le travail attendu est le suivant :

- **Analyse mathématique du problème**
- **Analyse numérique du problème**
- **Etude de la "dualité"**