

L'analyse a posteriori et ses applications

Christine Bernardi

Laboratoire Jacques-Louis Lions

C.N.R.S. et Université Pierre et Marie Curie

L'analyse a posteriori est en quelques années devenue l'outil de base pour l'adaptation automatique de maillages en éléments et volumes finis. Toutefois elle a bien d'autres applications.

À propos des estimations a posteriori

Soit X un espace de Banach, et A une application continue de X dans X .
Pour un élément f de X , on s'intéresse à la discrétisation de l'équation :

Trouver u dans X tel que

$$A(u) = f.$$

δ : paramètre positif

On considère le problème :

Trouver u_δ dans X_δ tel que

$$A_\delta(u_\delta) = f_\delta,$$

où X_δ est un sous-espace de dimension finie de X , A_δ une approximation de A et f_δ une approximation de f dans X_δ .

Estimations a priori

$$\|u - u_\delta\|_X \leq F(\delta, u) + H(\delta, f).$$

La quantité $F(\delta, u)$ est en général une puissance de δ multipliée par une certaine norme de u , elle fait donc appel à la régularité de u (**la plupart du temps inconnue**).

\implies prouve la convergence de la méthode.

Estimations a posteriori

$$\|u - u_\delta\|_X \leq G(\delta, f_\delta, u_\delta) + K(\delta, f).$$

La quantité $G(\delta, f_\delta, u_\delta)$ peut se calculer explicitement une fois la solution discrète u_δ calculée.

\implies Permet de vérifier des critères de sécurité.

Application de base : adaptation de maillages

$$\|u - u_\delta\|_X \leq G(\delta, f_\delta, u_\delta) + K(\delta, f).$$

Si l'on suppose que la quantité $G(\delta, f_\delta, u_\delta)$ s'écrit $c \left(\sum_k \eta_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, où les η_k sont des quantités "locales" (liées à des sous-domaines de petites tailles), les η_k forment une famille d'**indicateurs d'erreur**.

Critère d'optimalité : Une famille d'indicateurs d'erreur $(\eta_k)_k$ est optimale s'il existe des constantes c_1 et c_2 indépendantes de δ telles que

$$\|u - u_\delta\|_X \leq c_1 \left(\sum_k \eta_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + K_1(\delta, f),$$

$$\eta_k \leq c_2 \|u - u_\delta\|_{X_k} + K_2^k(\delta, f),$$

où X_k désigne l'espace des restrictions des fonctions de X à un domaine de petite taille.

Lorsque la famille d'indicateurs d'erreur est optimale, on peut penser que les η_k forment une bonne carte de l'erreur

Stratégie d'adaptation :

$\bar{\eta}$: moyenne des η_k .

Lorsque un des η_k est supérieur à $\bar{\eta}$, on raffine le maillage dans le sous-domaine correspondant à cet η_k .

Sous des hypothèses convenables et pour un maillage initial fixé, on peut prouver la convergence de la méthode.

W. Dörfler

Autre application : discrétisations multi-étapes

Dans un grand nombre de cas, la discrétisation fait appel à un ou plusieurs problèmes intermédiaires (**non discrets**) avant le problème discret final. On peut cependant calculer des indicateurs d'erreur ne dépendant que de la solution discrète.

Le but de l'analyse a posteriori est alors d'optimiser tous les paramètres liés à la discrétisation.

Une application récente : couplage automatique de modèles

Dans un grand nombre de cas, la discrétisation du modèle complet – non linéaire ou tridimensionnel ou faisant intervenir plusieurs centaines d'inconnues – dans tout le domaine est trop complexe. L'analyse a posteriori permet de déterminer les parties du domaine où l'on peut discrétiser un modèle simplifié sans augmenter l'erreur globale.

M. Braack, A. Ern

Plan du cours :

- **Indicateurs d'erreur et adaptation de maillage**
 - ★ Les estimations de base
 - ★ Un exemple de discrétisation non conforme
- **Indicateurs d'erreur en discrétisation multi-étapes**
 - ★ Introduction à la discrétisation multi-étapes
 - ★ Adaptation en temps et espace pour une équation parabolique
 - ★ Optimisation de la pénalisation pour le problème de Stokes
 - ★ Un peu d'axisymétrie

Principales restrictions et limitations :

- ★ Estimations en norme de l'énergie
 - ★ Indicateurs essentiellement de type résidu
 - ★ Discrétisations principalement par éléments finis
 - ★ Maillages isotropes

Les estimations de base

- Indicateurs par résidu,
- Indicateurs par résidu et problèmes locaux,
- Extension au problème de Stokes.

Travail commun avec B. Métivet et R. Verfürth

Indicateurs par résidu

Le problème modèle que l'on considère ici est l'équation de Laplace.

Ω : polygone ou polyèdre à frontière lipschitzienne.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Ce problème admet la formulation variationnelle équivalente suivante

Trouver u dans $H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

où la forme $a(\cdot, \cdot)$ est définie par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, d\mathbf{x}.$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Le lemme de Lax-Milgram entraîne que

Le problème variationnel admet une solution unique u dans $H_0^1(\Omega)$. En outre, cette solution vérifie

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|f\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

où c est la constante de Poincaré–Friedrichs, donc ne dépend que de la géométrie de Ω .

$(\mathcal{T}_h)_h$: famille régulière de triangulations de Ω par des triangles ou des tétraèdres, au sens usuel que

- Pour tout h , $\overline{\Omega}$ est l'union des éléments de \mathcal{T}_h ,
- Pour tout h , l'intersection de deux éléments distincts de \mathcal{T}_h est soit vide soit un sommet soit un côté entier soit une face entière de ces deux éléments,
- Le quotient h_K/ρ_K du diamètre h_K d'un élément K de \mathcal{T}_h par le diamètre ρ_K de son cercle inscrit ou de sa sphère inscrite est inférieur ou égal à une constante σ qui ne dépend ni de K ni de h .

h : plus grand diamètre des éléments K de \mathcal{T}_h .

$$X_h^0 = \left\{ v_h \in H_0^1(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathcal{P}_\ell(K) \right\}.$$

Le problème discret est construit par la méthode de Galerkin.

Trouver u_h dans X_h^0 tel que

$$\forall v_h \in X_h^0, \quad a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

Il admet une solution unique.

**Estimations d'erreur a priori : Si la solution u appartient à $H^{s+1}(\Omega)$,
 $0 \leq s \leq \ell$,**

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c h^s \|u\|_{H^{s+1}(\Omega)}.$$

Les indicateurs d'erreur par résidu

\mathcal{E}_K : ensemble des côtés ($d = 2$) ou faces ($d = 3$) d'un élément K de \mathcal{T}_h qui ne sont pas contenues dans $\partial\Omega$.

h_K : diamètre d'un élément K de \mathcal{T}_h .

h_e : longueur ou diamètre d'un élément e de \mathcal{E}_K .

f_h : approximation de la donnée f dans

$$Z_h = \left\{ g_h \in L^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathcal{P}_m(K) \right\}.$$

Pour tout élément K de \mathcal{T}_h , l'indicateur d'erreur η_K est défini par

$$\eta_K = h_K \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)}.$$

$$\eta_K = h_K \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)}.$$

Indicateur par résidu : Si l'on supprime les indices h dans cette définition, tout s'annule.

L'indicateur d'erreur est très facile à calculer une fois que la solution discrète u_h est connue.

Par exemple, lorsque ℓ est égal à 1, m est le plus souvent choisi égal à 0, et

$$\eta_K = h_K \text{mes}(K)^{\frac{1}{2}} |f_h|_K + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \text{mes}(e)^{\frac{1}{2}} |[\partial_n u_h]_e|.$$

Pourquoi ?

Équation du résidu :

L'équation du résidu s'obtient en "appliquant" le problème continu à l'erreur $u - u_h$.

Pour tous v dans $H_0^1(\Omega)$ et v_h dans X_h^0 ,

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v) &= a(u - u_h, v - v_h) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K f(\mathbf{x})(v - v_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_K \text{grad } u_h \cdot \text{grad } (v - v_h) \, d\mathbf{x}, \right. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (f_h + \Delta u_h)(\mathbf{x})(v - v_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_K (f - f_h)(\mathbf{x})(v - v_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n u_h](\tau)(v - v_h)(\tau) \, d\tau \right). \end{aligned}$$

La majoration de l'erreur a posteriori

L'ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$ entraîne

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{a(u - u_h, v)}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}.$$

D'après l'équation du résidu, par inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v) \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left((\|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \|f - f_h\|_{L^2(K)}) \|v - v_h\|_{L^2(K)} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)} \|v - v_h\|_{L^2(e)} \right). \end{aligned}$$

On prend v_h égal à l'image de v par l'opérateur de régularisation de Clément.

Outil de base : opérateur de Clément

Cet opérateur R_h est défini sur des fonctions non régulières (en particulier non continues) à valeurs dans X_h^0 et possède des propriétés d'approximation locale.

Pour toute fonction v de $H_0^1(\Omega)$,

$$\|v - R_h v\|_{L^2(K)} \leq c h_K \|v\|_{H^1(\Delta_K)},$$

où Δ_K désigne l'union des éléments de \mathcal{T}_h dont l'intersection avec K est non vide,

$$\|v - R_h v\|_{L^2(e)} \leq c h_e^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H^1(\Delta_e)},$$

où Δ_e désigne l'union des éléments de \mathcal{T}_h dont l'intersection avec e est non vide,

La constante c est difficile à évaluer et dépend grandement du paramètre de régularité σ .

$$a(u - u_h, v) \leq c \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(h_K \left(\|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \|f - f_h\|_{L^2(K)} \right) \|v\|_{H^1(\Delta_K)} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)} \|v\|_{H^1(\Delta_e)} \right).$$

plus encore une inégalité de Cauchy–Schwarz.

Théorème. Il existe une constante c indépendante de h telle qu'on ait la majoration d'erreur a posteriori suivante

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\eta_K^2 + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Une majoration pour chaque indicateur d'erreur

Équation du résidu :

$$a(u - u_h, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (f_h + \Delta u_h)(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_K (f - f_h)(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n u_h](\tau) v(\tau) d\tau \right).$$

Pour tout K dans \mathcal{T}_h , on choisit v égal à v_K , avec

$$v_K = (f_h + \Delta u_h) \psi_K \quad \text{sur } K \quad v_K = 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus K.$$

où ψ_K désigne la fonction bulle sur K ,

$$\|(f_h + \Delta u_h) \psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(K)}^2 \leq |u - u_h|_{H^1(K)} |v_K|_{H^1(K)} + \|f - f_h\|_{L^2(K)} \|v_K\|_{L^2(K)}.$$

On utilise alors des inégalités inverses sur chaque K .

Outil de base : inégalités inverses

Soit r un entier ≥ 0 . Les inégalités inverses se démontrent par passage à l'élément de référence, grâce à l'équivalence de normes sur un espace de dimension finie.

Pour tout polynôme v de $\mathcal{P}_r(K)$,

$$c \|v\|_{L^2(K)} \leq \|v \psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(K)} \leq c' \|v\|_{L^2(K)},$$

et

$$\|v\|_{H^1(K)} \leq c h_K^{-1} \|v\|_{L^2(K)}.$$

La constante c dépend encore du paramètre de régularité σ mais est plus facile à évaluer.

$$\|(f_h + \Delta u_h) \psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(K)}^2 \leq |u - u_h|_{H^1(K)} |v_K|_{H^1(K)} + \|f - f_h\|_{L^2(K)} \|v_K\|_{L^2(K)}.$$

Puis on note que $f_h + \Delta u_h$ appartient à $\mathcal{P}_{\max\{m, \ell-2\}}(K)$, donc que v_K appartient à $\mathcal{P}_{\max\{m, \ell-2\}+d+1}(K)$.

$$h_K \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} \leq c \left(|u - u_h|_{H^1(K)} + h_K \|f - f_h\|_{L^2(K)} \right).$$

\implies Une majoration du premier terme de η_K .

Pour tout K dans \mathcal{T}_h et $e \in \mathcal{E}_K$, si K' désigne l'autre élément de \mathcal{T}_h qui contient e , on choisit v égal à v_e , avec

$$v_e = \mathcal{L}_{e,\kappa}([\partial_n u_h] \psi_e) \quad \text{sur } \kappa \in \{K, K'\} \quad v_e = 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus (K \cup K').$$

où ψ_e désigne la fonction bulle sur e .

$\mathcal{L}_{e,\kappa}$: opérateur de relèvement des polynômes de $\mathcal{P}_{\ell-1+d}(e)$ s'annulant sur ∂e en des polynômes sur κ s'annulant sur $\partial\kappa \setminus e$, **construit par transformation affine à partir d'un opérateur $\hat{\mathcal{L}}$ similaire sur le triangle de référence.**

$$\begin{aligned} \|([\partial_n u_h] \psi_e^{\frac{1}{2}})\|_{L^2(e)}^2 &\leq \|u - u_h\|_{H^1(K \cup K')} \|v_e\|_{H^1(K \cup K')} + \|f - f_h\|_{L^2(K \cup K')} \|v_e\|_{L^2(K \cup K')} \\ &\quad + \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K \cup K')} \|v_e\|_{L^2(K \cup K')}. \end{aligned}$$

Outil de base : inégalités inverses (bis) plus

Les résultats suivants se démontrent encore et toujours par passage à l'élément de référence,

Pour tout polynôme v de $\mathcal{P}_r(e)$,

$$c \|v\|_{L^2(e)} \leq \|v \psi_e^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(e)} \leq c' \|v\|_{L^2(e)}.$$

et pour tout polynôme v de $\mathcal{P}_r(e)$ s'annulant sur ∂e ,

$$\|\mathcal{L}_{e,\kappa} v\|_{L^2(\kappa)} + h_e |\mathcal{L}_{e,\kappa} v|_{H^1(\kappa)} \leq c h_e^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(e)}.$$

$$h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)} \leq c \left(|u - u_h|_{H^1(K \cup K')} + h_K \|f - f_h\|_{L^2(K \cup K')} + h_K \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K \cup K')} \right)$$

\implies Une majoration du second terme de η_K .

Théorème. L'estimation suivante est vérifiée pour chaque indicateur η_K , $K \in \mathcal{T}_h$, et pour une constante c indépendante de K et de h :

$$\eta_K \leq c \left(|u - u_h|_{H^1(\omega_K)} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \|f - f_h\|_{L^2(\kappa)} \right),$$

où ω_K désigne l'union soit des triangles partageant au moins un côté avec K ($d = 2$), soit des tétraèdres partageant au moins une face avec K ($d = 3$).

Conclusions

- Aux termes portant sur la donnée près, l'erreur est équivalente à la quantité $\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{\frac{1}{2}}$, avec des constantes d'équivalence indépendantes de h .

$$\begin{aligned} c_1 \left(\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2)^{\frac{1}{2}} - h \|f - f_h\|_{L^2(\Omega)} \right) \right) &\leq \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq c_2 \left(\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2)^{\frac{1}{2}} + h \|f - f_h\|_{L^2(\Omega)} \right) \right). \end{aligned}$$

Estimations parfaitement optimales.

- Les indicateurs d'erreur sont faciles à calculer dès que l'on connaît la solution discrète.
- La dernière estimation est locale.

Permet une stratégie d'adaptativité très simple.

Cas de conditions aux limites de Dirichlet non homogènes

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Ce problème admet la formulation variationnelle équivalente suivante

Trouver u dans $H^1(\Omega)$ tel que

$$u = g \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

et que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

$$X_h = \{v_h \in H^1(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathcal{P}_\ell(K)\}.$$

Le problème discret s'écrit

Trouver u_h dans X_h tel que

$$u_h = g_h \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

et que

$$\forall v_h \in X_h^0, \quad a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

où g_h appartient à l'espace des traces de X_h sur $\partial\Omega$ et est en général égal à l'interpolé de Lagrange de g .

Les indicateurs d'erreur sont définis exactement comme précédemment :

$$\eta_K = h_K \operatorname{mes}(K) |f_h|_K + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \operatorname{mes}(e) |[\partial_n u_h]_e|.$$

L'analogie des estimations précédentes s'écrit maintenant

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\eta_K^2 + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} + c' \|g - g_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

$$\eta_K \leq c \left(|u - u_h|_{H^1(\omega_K)} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \|f - f_h\|_{L^2(\kappa)} \right),$$

Cas de conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n u = k & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

On suppose que

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} k(\tau) \, d\tau = 0.$$

Ce problème admet la formulation variationnelle équivalente suivante

Trouver u dans $H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} k(\tau)v(\tau) \, d\tau,$$

où $L_0^2(\Omega)$ désigne l'espace

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

Le problème discret s'écrit

Trouver u_h dans $X_h \cap L_0^2(\Omega)$ tel que

$$\forall v_h \in X_h \cap L_0^2(\Omega), \quad a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} k(\tau)v_h(\tau) \, d\tau,$$

\mathcal{E}_K^b : ensemble des côtés ($d = 2$) ou faces ($d = 3$) d'un élément K de \mathcal{T}_h qui sont contenues dans $\partial\Omega$.

k_h : approximation de la donnée k qui appartient à $\mathcal{P}_m(e)$ pour tout e dans \mathcal{E}_K^b , $K \in \mathcal{T}_h$.

Pour tout élément K de \mathcal{T}_h , l'indicateur d'erreur η_K est défini par

$$\eta_K = h_K \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)} + \sum_{e \in \mathcal{E}_K^b} h_e^{\frac{1}{2}} \|k_h - \partial_n u_h\|_{L^2(e)}.$$

Pourquoi ?

Équation du résidu :

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v) = & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (f_h + \Delta u_h)(\mathbf{x}) (v - v_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_K (f - f_h)(\mathbf{x}) (v - v_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ & - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n u_h](\tau) (v - v_h)(\tau) \, d\tau \\ & \left. + \sum_{e \in \mathcal{E}_K^b} \left(\int_e (k_h - \partial_n u_h)(\tau) (v - v_h)(\tau) \, d\tau + \int_e (k - k_h)(\tau) (v - v_h)(\tau) \, d\tau \right) \right). \end{aligned}$$

On a les estimations

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\eta_K^2 + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_K^b} h_e \|k - k_h\|_{L^2(e)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\eta_K \leq c \left(|u - u_h|_{H^1(\omega_K)} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \|f - f_h\|_{L^2(\kappa)} + \sum_{e \subset \mathcal{E}_K^b} h_e^{\frac{1}{2}} \|k - k_h\|_{L^2(e)} \right).$$

Indicateurs par résidu et problèmes locaux

L'idée est maintenant d'évaluer le résidu par la résolution de problèmes discrets locaux qui peuvent être munis de conditions aux limites soit de type Neumann soit de type Dirichlet (sur un domaine légèrement plus grand).

Problèmes de Neumann locaux

Pour tout élément K de \mathcal{T}_h ,

$$X_h(K) = \left\{ v_K \in \mathcal{P}_L(K); v_K = 0 \text{ aux coins de } K \text{ et sur } \partial\Omega \cap K \right\},$$

où L est égal à $\sup\{\ell + d - 1, m + d + 1\}$.

Trouver u_K dans $X_h(K)$ tel que

$$\begin{aligned} \forall w_K \in X_h(K), \quad & \int_K \mathbf{grad} u_K \cdot \mathbf{grad} w_K \, dx \\ & = \int_K (f_h + \Delta u_h)(\mathbf{x}) w_K(\mathbf{x}) \, dx \\ & \quad - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n u_h](\tau) w_K(\tau) \, d\tau. \end{aligned}$$

Pour tout élément K de \mathcal{T}_h , l'indicateur d'erreur η_K^N est défini par

$$\eta_K^N = |u_K|_{H^1(K)}.$$

Proposition. On a les estimations

$$c\eta_K^N \leq \eta_K \leq c'\eta_K^N.$$

Démonstration :

1) Pour majorer η_K^N , on choisit dans le problème de Neumann local v_K égal à u_K , ce qui donne

$$|u_K|_{H^1(K)}^2 \leq \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} \|u_K\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)} \|u_K\|_{L^2(e)}.$$

Puis on utilise les inégalités de Poincaré–Friedrichs généralisées, dues au fait que les fonctions de $X_h(K)$ s'annulent aux sommets de K et prouvées par passage à l'élément fini de référence :

$$\forall w_K \in X_h(K), \quad \|w_K\|_{L^2(K)} \leq c h_K |w_K|_{H^1(K)}$$

$$\text{et} \quad \|w_K\|_{L^2(e)} \leq c h_e^{\frac{1}{2}} |w_K|_{H^1(K)}.$$

2) Pour majorer η_K , on choisit dans le problème de Neumann local w_K successivement égal aux restrictions à K de v_K , puis égal de v_e pour tout e dans \mathcal{E}_K .

Rappel : Par exemple, $v_K = (f_h + \Delta u_h) \psi_K$.

plus les mêmes inégalités inverses que précédemment.

Chaque indicateur η_K^N est parfaitement équivalent à η_K . Donc on a la même majoration de l'erreur globale par

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

plus des termes portant sur les données et la même majoration de η_K^N en fonction de l'erreur locale.

Problèmes de Dirichlet locaux

Pour tout élément K de \mathcal{T}_h ,

$$X_h^0(K) = \left\{ v_K \in H_0^1(\omega_K); \forall \kappa \subset \omega_K, v_K|_{\kappa} \in \mathcal{P}_L(\kappa) \right\}.$$

Trouver u_K^0 dans $X_h^0(K)$ tel que

$$\begin{aligned} \forall w_K \in X_h^0(K), \quad & \int_{\omega_K} \text{grad } u_K^0 \cdot \text{grad } w_K \, dx \\ & = \sum_{\kappa \subset \omega_K} \int_{\kappa} (f_{mh} + \Delta u_h)(\mathbf{x}) w_K(\mathbf{x}) \, dx \\ & \quad - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n u_h](\tau) w_K(\tau) \, d\tau. \end{aligned}$$

Pour tout élément K de \mathcal{T}_h , l'indicateur d'erreur η_K^D est défini par

$$\eta_K^D = |u_K^0|_{H^1(K)}.$$

Proposition. On a les estimations

$$\eta_K^D \leq c \sum_{\kappa \subset \omega_K} \eta_\kappa \quad \text{et} \quad \eta_K \leq c' \eta_K^D.$$

Démonstration : Dans le problème de Dirichlet local, on choisit successivement w_K

1) égal à u_K^0 (plus exactement les mêmes inégalités de Poincaré–Friedrichs généralisées que précédemment),

2) égal aux restrictions à ω_K de v_K puis de v_e pour tout e dans \mathcal{E}_K (plus encore et toujours les mêmes inégalités inverses).

Les indicateurs η_N^D ont des propriétés parfaitement équivalentes à celles des η_K^N .

Problèmes locaux réduits

Les résultats précédents sont encore valables si on remplace $X_h(K)$ par

$$\widetilde{X}_h(K) = \mathbf{Vect} \left(\begin{aligned} & \{\psi_K w, w \in \mathcal{P}_{\sup\{\ell-2, m\}}(K)\}, \\ & \cup_{e \in \mathcal{E}_K} \{\mathcal{L}_{e, K}(\psi_e w)|_K, w \in \mathcal{P}_{\ell-1}(e)\} \end{aligned} \right),$$

et $X_h^0(K)$ par

$$\widetilde{X}_h^0(K) = \mathbf{Vect} \left(\begin{aligned} & \{\psi_K w, w \in \mathcal{P}_{\sup\{\ell-2, m\}}(K)\}, \\ & \cup_{e \in \mathcal{E}_K} \{\mathcal{L}_{e, \omega_K}(\psi_e w), w \in \mathcal{P}_{\ell-1}(e)\} \end{aligned} \right).$$

Par exemple, pour $\ell = 1$ et $m = 0$,

$\dim X_h(K) = 7$ en dimension 2 et 31 en dimension 3,

$\dim \widetilde{X}_h(K) = 4$ en dimension 2 et 5 en dimension 3.

Les indicateurs par problèmes locaux réduits sont donc beaucoup moins chers à calculer que les indicateurs par problèmes locaux. Toutefois leur extension à des problèmes plus compliqués, par exemple non linéaires, s'avère nettement plus coûteuse que pour les indicateurs par résidu.

Indicateurs pour le problème de Stokes

Ω : polygone ou polyèdre à frontière lipschitzienne.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta u + \text{grad } p = f & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Formulation variationnelle équivalente

Trouver (u, p) dans $H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ tel que

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \nu \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v})(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle,$$

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} (\text{div } u)(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Pour tout \mathbf{f} dans $H^{-1}(\Omega)^d$, ce problème admet une solution unique.

Requiert ellipticité + condition inf-sup.

Rappel :

Soit X et M deux espaces de Hilbert et $b(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue sur $X \times M$.

Les deux propriétés suivantes sont **équivalentes** :

(i) Il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\forall q \in M, \quad \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_M.$$

(ii) L'opérateur B défini de X dans M' par

$$\forall v \in X, \forall q \in M, \quad \langle Bv, q \rangle = b(v, q),$$

est un isomorphisme de l'orthogonal de son noyau sur M' , et la norme de son inverse est $\leq \beta^{-1}$.

$$X_h \subset H_0^1(\Omega)^d \quad \text{et} \quad M_h \subset L_0^2(\Omega).$$

Le problème discret

Trouver (\mathbf{u}_h, p_h) dans $X_h \times M_h$ tel que

$$\forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \nu \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{u}_h \cdot \text{grad } \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) p_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle,$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) q_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Une condition inf-sup liant X_h et M_h est nécessaire pour que le problème discret soit bien posé et aussi pour obtenir des majorations d'erreur a priori.

Les indicateurs d'erreur par résidu

Pour tout élément K de \mathcal{T}_h , l'indicateur d'erreur η_K est défini par

$$\eta_K = h_K \|\mathbf{f}_h + \nu \Delta \mathbf{u}_h - \text{grad } p_h\|_{L^2(K)^d} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \|\nu \partial_n \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}\|_{L^2(e)^d} + \|\text{div } \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)},$$

où \mathbf{f}_h est une approximation de \mathbf{f} dans Z_h^d .

Indicateur par résidu : Si l'on supprime les indices h dans cette définition, tout s'annule.

L'indicateur d'erreur est très facile à calculer une fois que la solution discrète (\mathbf{u}_h, p_h) est connue.

Pourquoi ?

Équations du résidu :

Pour tous v dans $H_0^1(\Omega)$ et v_h dans X_h^0 ,

$$\begin{aligned} & \nu \int_{\Omega} \text{grad}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \text{grad} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\text{div} \mathbf{v})(\mathbf{x})(p - p_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (\mathbf{f}_h + \Delta \mathbf{u}_h - \text{grad} p_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ & \quad \left. + \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}](\tau) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\tau) \, d\tau \right). \end{aligned}$$

Pour tout q dans $L_0^2(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} (\text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}))q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\text{div} \mathbf{u}_h)(\mathbf{x})q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Et après ?

R. Verfürth

On pose, avec $U = (\mathbf{u}, p)$ et $V = (\mathbf{v}, q)$,

$$A(U, V) = \nu \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{u} \cdot \text{grad } \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v})(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Le problème continu :

Trouver U dans $Y = H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ tel que

$$\forall V \in Y, \quad A(U, V) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle .$$

Le problème discret :

Trouver U_h dans $Y_h = X_h \times M_h$ tel que

$$\forall V_h \in Y_h, \quad A(U_h, V_h) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle .$$

Équation du résidu : Pour tout V dans Y et v_h dans X_h^0 ,

$$\begin{aligned}
 A(U - U_h, V) = & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K (\mathbf{f}_h + \Delta \mathbf{u}_h - \text{grad } p_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\
 & + \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}](\tau) \cot(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\tau) \, d\tau \\
 & \left. + \int_K (\text{div } \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right).
 \end{aligned}$$

Le problème de Stokes admet une solution unique pour tout (\mathbf{f}, g) dans $H^{-1}(\Omega)^d \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. Comme (ii) implique (i),

La forme $A(\cdot, \cdot)$ vérifie la condition inf-sup

$$\forall U \in Y, \quad \sup_{V \in Y} \frac{A(U, V)}{\|V\|_Y} \geq \beta \|U\|_Y.$$

On applique cette inégalité inf-sup avec U remplacé par $U - U_h$, puis on utilise l'opérateur de Clément.

Théorème. On suppose que X_h contient l'espace

$$\left\{ \mathbf{v}_h \in H_0^1(\Omega)^d; \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{P}_1(K)^d \right\}.$$

Il existe une constante c indépendante de h telle qu'on ait la majoration d'erreur a posteriori suivante

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(\Omega)^d} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\eta_K^2 + h_K^2 \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ne nécessite aucune condition inf-sup entre X_h et M_h .

Pour tout K dans \mathcal{T}_h , on choisit successivement dans l'équation du résidu,

1) V égal à $(v_K, 0)$ et v_h égal à 0, avec

$$v_K = (f_h + \Delta u_h - \text{grad } p_h) \psi_K \quad \text{sur } K \quad v_K = 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus K,$$

2) pour tout e dans \mathcal{E}_K , V égal à $(v_e, 0)$ et v_h égal à 0, avec

$$v_e = \mathcal{L}_{e,\kappa}([\partial_n u_h - p_h \mathbf{n}] \psi_e) \quad \text{sur } \kappa \in \{K, K'\} \quad v_e = 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus (K \cup K'),$$

3) V égal à $(0, q_K)$ et v_h égal à 0, avec

$$q_K = \text{div } u_h \quad \text{sur } K \quad q_K = 0. \quad \text{sur } \Omega \setminus K.$$

Puis on utilise les mêmes inégalités inverses que précédemment.

Théorème. L'estimation suivante est vérifiée pour chaque indicateur η_K , $K \in \mathcal{T}_h$, et pour une constante c indépendante de K et de h :

$$\eta_K \leq c \left(|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(\omega_K)^d} + \|p - p_h\|_{L^2(\omega_K)} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\kappa)^d} \right).$$

- On obtient les mêmes propriétés d'optimalité que pour l'équation de Laplace.
- Les indicateurs d'erreur sont faciles à calculer.
- L'évaluation des indicateurs par problèmes locaux nécessite des problèmes locaux réduits (et une condition inf-sup entre chaque paire d'espaces locaux).

Extension aux équations de Navier–Stokes

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \text{grad } p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Formulation variationnelle équivalente

Trouver (\mathbf{u}, p) dans $H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ tel que

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \nu \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{u} \cdot \text{grad } \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx \\ - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v})(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \, dx = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle,$$

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, dx = 0.$$

Pour tout \mathbf{f} dans $H^{-1}(\Omega)^d$, ce problème admet une solution.

Le problème discret

Trouver (\mathbf{u}_h, p_h) dans $X_h \times M_h$ tel que

$$\forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \nu \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{u}_h \cdot \text{grad } \mathbf{v}_h \, dx + \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, dx \\ - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) p_h(\mathbf{x}) \, dx = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle,$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) q_h(\mathbf{x}) \, dx = 0.$$

Sous des hypothèses standard, ce problème admet une solution localement unique et on peut prouver des estimations d'erreur a priori.

Les indicateurs d'erreur par résidu

Pour tout élément K de \mathcal{T}_h , l'indicateur d'erreur η_K est défini par

$$\eta_K = h_K \|\mathbf{f}_h + \nu \Delta \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h - \text{grad } p_h\|_{L^2(K)^d} \\ + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \|\nu \partial_n \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}\|_{L^2(e)^d} + \|\text{div } \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)},$$

où \mathbf{f}_h est une approximation de \mathbf{f} dans Z_h^d .

Le problème continu :

Si \mathcal{S} désigne l'opérateur de Stokes,

$$U + \mathcal{S}(G(U) - \mathbf{f}) = 0.$$

Le problème discret :

Si \mathcal{S}_h désigne l'opérateur de Stokes discret,

$$U_h + \mathcal{S}_h(G(U_h) - \mathbf{f}) = 0.$$

Équation du résidu :

$$U_h + \mathcal{S}(G(U_h) - \mathbf{f}) = \mathcal{S}R_h(U_h),$$

d'où

$$U - U_h + \mathcal{S}(G(U) - G(U_h)) = -\mathcal{S}R_h(U_h).$$

Théorème. Soit (u, p) une solution des équations de Navier-Stokes telle que $Id + SDG(U)$ soit un isomorphisme de Y . Il existe un voisinage \mathcal{U} de (u, p) dans Y et une constante $c(f)$ indépendante de h telle qu'on ait la majoration d'erreur a posteriori suivante pour toute solution (u_h, p_h) du problème discret appartenant à \mathcal{U}

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)^d} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c(f) \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\eta_K^2 + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- L'hypothèse du théorème indique simplement que le problème de Navier-Stokes linéarisées en (u, p) est bien posé.
- L'estimation a posteriori est toujours optimale.

Les mêmes arguments que pour le problème de Stokes (avec un choix un peu modifié de v_K) mènent à une borne supérieure pour chaque indicateur d'erreur.

Théorème. L'estimation suivante est vérifiée pour chaque indicateur η_K , $K \in \mathcal{T}_h$ et pour une constante $c(\mathbf{f})$ indépendante de K et de h :

$$\eta_K \leq c(\mathbf{f}) \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1(\omega_K)^d} + \|p - p_h\|_{L^2(\omega_K)} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\kappa)^d} \right).$$

- Cette estimation est encore locale en espace, donc

Un exemple de discrétisation non conforme

Un schéma d'éléments ou volumes finis adaptatif

pour les équations de Darcy

Travail commun avec Y. Achdou et F. Coquel
dans le cadre d'un contrat avec Électricité de France

Les équations de **Darcy** modélisent l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans un milieu poreux, homogène ou non homogène.

H. Darcy (1856)

- Les équations de Darcy et leurs formulations variationnelles
- Des éléments finis qui marchent mal, moyennement ou presque bien
- Un schéma d'éléments ou volumes finis optimal
- Et son analyse a posteriori

Les équations de Darcy et leurs formulations variationnelles

Les équations de **Darcy** dans un ouvert Ω borné de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 , s'écrivent

$$\begin{cases} \mathbf{u} + \mu \operatorname{grad} p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Inconnues : vitesse \mathbf{u} , pression p .

Données : Densité de forces volumiques \mathbf{f} (ou donnée sur le bord).

μ : fonction strictement positive égale au quotient de la viscosité du fluide par la perméabilité du milieu (μ^{-1} est appelé porosité).

La fonction μ est constante dans le cas d'un milieu homogène. Dans la suite de cet exposé, on prend μ égal à 1.

Première formulation variationnelle

$$H(\operatorname{div}, \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d; \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \right\},$$

$$H_0(\operatorname{div}, \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega); \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\},$$

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

Trouver (\mathbf{u}, p) dans $H_0(\operatorname{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$ tel que

$$\forall \mathbf{v} \in H_0(\operatorname{div}, \Omega), \quad \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega); \forall q \in L_0^2(\Omega), \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega); \text{div } \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega \right\}.$$

- **Ellipticité de la première forme bilinéaire sur V seulement**

- **Condition inf-sup pour la seconde forme**

S'obtient en prenant \mathbf{v} égal à $\text{grad } \varphi$, où φ est solution d'une équation de Laplace de donnée q et conditions de Neumann homogènes.

Le problème admet une solution unique.

Deuxième formulation variationnelle

Trouver (u, p) dans $L^2(\Omega)^d \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$ tel que

$$\forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d; \forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega); \text{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega \right\}. \end{aligned}$$

- Ellipticité de la première forme bilinéaire sur $L^2(\Omega)^d$
- Condition inf-sup pour la seconde forme
S'obtient en prenant v égal à $\text{grad } q$.

Le problème admet une solution unique.

Troisième formulation variationnelle

J.-M. Thomas

On mélange les objets utilisés dans les deux premières.

Une propriété de régularité

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

C. Amrouche, C.B., M. Dauge, V. Girault
M. Costabel, M. Dauge

On suppose la donnée \mathbf{f} dans $L^2(\Omega)^d$ à rotationnel dans $L^2(\Omega)^{2d-3}$.

Lorsque Ω est un polygone ou un polyèdre à frontière lipschitzienne, la solution (\mathbf{u}, p) appartient à $H^s(\Omega)^d \times H^{s+1}(\Omega)$

- pour $s = 1$ lorsque Ω est convexe,
- pour un $s > \frac{1}{2}$ sinon (la valeur maximale de s dans ce cas est explicitement connue dans le cas de la dimension 2).

Des éléments finis qui marchent mal, moyennement ou presque bien

$(\mathcal{T}_h)_h$: famille régulière de triangulations de Ω .

Éléments finis pour la première formulation variationnelle

$$X_h \subset H_0(\text{div}, \Omega), \quad M_h \subset L_0^2(\Omega).$$

Trouver (\mathbf{u}_h, p_h) dans $X_h \times M_h$ tel que

$$\forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \int_{\Omega} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) p_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) q_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0,$$

Exemple 1 :

$$X_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in H^1(\Omega)^d \cap H_0(\text{div}, \Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{P}_2(K)^d \right\},$$

$$M_h = \left\{ q_h \in L_0^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in \mathcal{P}_0(K) \right\},$$

Pas de convergence, ni en vitesse, ni en pression.

Exemple 2 : mini-élément d'Arnold–Brezzi–Fortin

$$X_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in H^1(\Omega)^d \cap H_0(\text{div}, \Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{P}(K)^d \right\},$$

$$M_h = \left\{ q_h \in L_0^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in \mathcal{P}_1(K) \right\},$$

où $\mathcal{P}(K)$ est la somme de $\mathcal{P}_1(K)$ et de la fonction bulle.

Convergence d'ordre 1 (non optimale) en vitesse et en pression.

Exemple 3 : élément fini de Raviart–Thomas

$$X_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in H_0(\text{div}, \Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{P}'(K) \right\},$$

$$M_h = \left\{ q_h \in L_0^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in \mathcal{P}_0(K) \right\},$$

où $\mathcal{P}'(K)$ désigne l'espace engendré par $\mathcal{P}_0(K)^d$ et \mathbf{x} .

Estimations a priori optimales, estimations a posteriori non optimales.

D. Braess, R. Verfürth

La formulation variationnelle considérée ici n'est pas homogène et ne peut donc mener à des estimations a posteriori optimales.

Éléments finis pour la seconde formulation variationnelle

$$X_h \subset L^2(\Omega)^d, \quad M_h \subset H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega).$$

Trouver (\mathbf{u}_h, p_h) dans $X_h \times M_h$ tel que

$$\forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \int_{\Omega} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} p_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad \int_{\Omega} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} q_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0,$$

Exemple 4 : élément fini de Taylor–Hood

$$X_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in H^1(\Omega)^d; \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{P}_2(K)^d \right\},$$

$$M_h = \left\{ q_h \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in \mathcal{P}_1(K) \right\},$$

**Estimations d'erreur a priori et a posteriori optimales
pour la seconde formulation**

Exemple 5 : élément fini rhéologique

$$X_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in L^2(\Omega)^d; \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{P}_0(K)^d \right\},$$

$$M_h = \left\{ q_h \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in \mathcal{P}_1(K) \right\},$$

**Estimations d'erreur a priori et a posteriori optimales
mais la vitesse discrète n'est pas à divergence exactement nulle.**

Un schéma d'éléments ou volumes finis optimal

Le problème discret par éléments finis

$$X_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in L^2(\Omega)^d; \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{P}_0(K)^d \right\}.$$

M. Crouzeix, P.-A. Raviart

M_h : espace des fonctions de $L^2(\Omega)$

- dont la restriction à chaque élément K de \mathcal{T}_h est affine,
- qui sont continues aux milieux des côtés ($d = 2$) ou aux barycentres des faces ($d = 3$) des éléments de \mathcal{T}_h .

L'espace M_h n'est pas inclus dans $H^1(\Omega)$

\Rightarrow Discrétisation non conforme !

Trouver (\mathbf{u}_h, p_h) dans $X_h \times M_h$ tel que

$$\forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \int_{\Omega} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad b_h(\mathbf{u}_h, q_h) = 0,$$

où la forme bilinéaire $b_h(\cdot, \cdot)$ est donnée par

$$b_h(\mathbf{v}_h, q_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{grad} \, q_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

$$\|q_h\|_{H_h^1(\Omega)} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|q_h\|_{H^1(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- **Ellipticité de la première forme bilinéaire sur $L^2(\Omega)^d$**
- **Condition inf-sup pour la seconde forme**

S'obtient en prenant v_h égal à $\text{grad } q_h$ plus équivalence des norme et semi-norme brisées.

Le problème admet une solution unique.

Le schéma de volumes finis

$\bar{\mathcal{E}}_K$: ensemble des côtés ($d = 2$) ou faces ($d = 3$) de K ,

$$\mathcal{E}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \bar{\mathcal{E}}_K.$$

$[\cdot]_e$: trace sur e si e est contenu dans $\partial\Omega$, saut à travers e sinon.

Trouver $(u_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ et $(p_e)_{e \in \mathcal{E}_h}$ tels que

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \mathbf{u}_K + \frac{1}{\text{mes}(K)} \sum_{e \in \bar{\mathcal{E}}_K} p_e \text{mes}(e) \mathbf{n}_K = \frac{1}{\text{mes}(K)} \int_K \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall e \in \mathcal{E}_h, \quad [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_e = 0.$$

- Le problème d'éléments finis et le schéma de volumes finis sont équivalents.

$\chi_K, K \in \mathcal{T}_h$: fonctions caractéristiques de K .

$\varphi_e, e \in \mathcal{E}_h$: fonctions de Lagrange associées aux milieux ($d = 2$) ou barycentres ($d = 3$) des côtés ou faces e .

Proposition : Les $(u_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ et $(p_e)_{e \in \mathcal{E}_h}$ sont solution du schéma de volumes finis si et seulement si le couple (u_h, p_h) défini par

$$u_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} u_K \chi_K, \quad p_h = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} p_e \varphi_e,$$

est, à une constante additive sur la pression près, solution du problème d'éléments finis.

Démonstration :

1) Les fonctions $\chi_K e$, $K \in \mathcal{T}_h$, où e décrit la base canonique de \mathbb{R}^d , forment une base de X_h . Donc, EF1 équivaut à

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \mathbf{u}_K \text{mes}(K) + \int_K \text{grad } p_h \, dx = \int_K \mathbf{f}(x) \, dx,$$

ou encore

$$\mathbf{u}_K + \frac{1}{\text{mes}(K)} \sum_{e \in \bar{\mathcal{E}}_K} p_e \int_K \text{grad } \varphi_e \, dx = \frac{1}{\text{mes}(K)} \int_K \mathbf{f}(x) \, dx.$$

On calcule

$$\int_K \text{grad } \varphi_e \, dx = \int_e \varphi_e \mathbf{n}_K \, d\tau = \text{mes}(e) \mathbf{n}_K.$$

$$\text{EF1} \iff \text{VF1}$$

2) Les φ_e , $e \in \mathcal{E}_h$, forment une base de M_h . Donc, EF2 équivaut à

$$\forall e \in \mathcal{E}_h, \quad \sum_{e \subset K} \mathbf{u}_K \cdot \int_K \text{grad } \varphi_e \, dx = 0.$$

$$\text{EF2} \iff \text{VF2}$$

- **Le schéma est parfaitement conservatif.**

Vitesse à divergence exactement nulle.

$$V_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in X_h; \forall q_h \in M_h, b_h(\mathbf{v}_h, q_h) = 0 \right\}.$$

Proposition : L'espace V_h est formé des fonctions de X_h qui sont à divergence nulle dans Ω et à trace normale nulle sur $\partial\Omega$.

Estimations a priori

On fixe la constante sur la pression discrète en imposant que p_h appartienne à $L_0^2(\Omega)$, c'est-à-dire que

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} p_e \text{mes}(\omega_e) = 0.$$

ω_e : union des un ou deux éléments de \mathcal{T}_h contenant e .

Théorème : Si la solution (\mathbf{u}, p) appartient à $H^s(\Omega)^d \times H^{s+1}(\Omega)$, $0 < s \leq 1$, on a la majoration d'erreur a priori suivante

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \|p - p_h\|_{H_h^1(\Omega)} \leq c(\mathbf{u}, p) h^s.$$

Et son analyse a posteriori

Indicateurs d'erreur

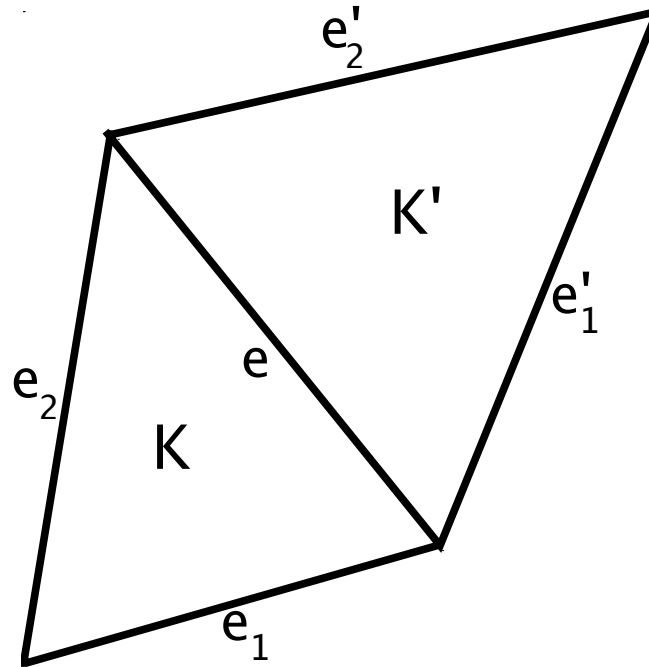
\mathcal{E}_h^0 : ensemble des éléments de \mathcal{E}_h qui ne sont pas contenus dans $\partial\Omega$.

h_e : longueur ($d = 2$) ou diamètre ($d = 3$) de e .

Pour tout e dans \mathcal{E}_h^0 ,

$$\eta_e = h_e^{-\frac{1}{2}} \| [p_h]_e \|_{L^2(e)}.$$

Peu coûteux à calculer !



a_i , $1 \leq i \leq d$: extrémités ou sommets de e ,

e_i et e'_i : côté ou face opposée à a_i dans les éléments K et K' contenant e .

En dimension $d = 2$,

$$\eta_e = \frac{1}{\sqrt{3}} |p_{e_1} - p_{e'_1} + p_{e'_2} - p_{e_2}|.$$

Estimations a posteriori

\mathbf{f}_h : approximation de \mathbf{f} dans X_h telle que

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \mathbf{f}_h|_K = \frac{1}{\text{mes}(K)} \int_K \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Théorème : On a la majoration d'erreur a posteriori suivante

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \|p - p_h\|_{H_h^1(\Omega)} \leq c \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \eta_e^2 \right)^{\frac{1}{2}} + c' \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Démonstration : En deux étapes.

1) Comme $b(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p)$ est nul, on a

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{f} - \mathbf{u}_h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) dx.$$

On ajoute et on soustrait $b_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p_h)$:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{u}_h - \text{grad } p_h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) dx + b_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p_h).$$

Le terme $\mathbf{f}_h - \mathbf{u}_h - \text{grad } p_h$ étant nul sur chaque K , le premier terme se majore par

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(K)^d} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)^d}.$$

Pour évaluer le second terme, on introduit une approximation **conforme** p_h^* de p_h , c'est-à-dire dans $M_h \cap H^1(\Omega)$.

$$b_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p_h) = b_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p_h - p_h^*) \leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |p_h - p_h^*|_{H^1(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

On choisit p_h^* tel que

$$\forall \mathbf{a} \in \mathcal{V}_h, \quad p_h^*(\mathbf{a}) = \frac{1}{\text{card}(\mathcal{T}_{\mathbf{a}})} \sum_{K \in \mathcal{T}_{\mathbf{a}}} p_h|_K(\mathbf{a}).$$

Alors

$$(p_h - p_h^*)(\mathbf{a}) = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} c_e [p_h]_e(\mathbf{a}) \leq c \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^{-\frac{d-1}{2}} \| [p_h]_e \|_{L^2(e)}.$$

D'autre part,

$$|p_h - p_h^*|_{H^1(K)} \leq c \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{V}_K} |(p_h - p_h^*)(\mathbf{a})| h_K^{\frac{d}{2}-1}.$$

On en déduit finalement

$$b_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p_h) \leq c \left(\sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{V}_h} \sum_{e \in \mathcal{E}_{\mathbf{a}}} h_e^{-1} \| [p_h]_e \|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{L^2(\Omega)^d}.$$

**2) On introduit la fonction \mathbf{v} telle que $\mathbf{v}|_K$ soit égal à $(\text{grad}(p - p_h))|_K$.
On obtient**

$$\|p - p_h\|_{H_h^1(\Omega)}^2 \leq c b_h(\mathbf{v}, p - p_h).$$

Par divers arguments techniques,

$$\|p - p_h\|_{H_h^1(\Omega)}^2 \leq c \left(\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \right) \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Dû à la définition de \mathbf{v} , ceci entraîne

$$\|p - p_h\|_{H_h^1(\Omega)} \leq c \left(\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \right).$$

Théorème : Les indicateurs d'erreur η_e , $e \in \mathcal{E}_h^0$, vérifient la majoration

$$\eta_e \leq c \sum_{e \subset K} |p - p_h|_{H^1(K)}.$$

Démonstration : Soit K_1 et K_2 les éléments de \mathcal{T}_h qui contiennent e .
On résout les problèmes

$$-\Delta \varphi_i = 0 \quad \text{dans } K_i,$$

avec les conditions aux limites de Neumann

$$\partial_n \varphi_i = [p_h]_e \quad \text{sur } e \quad \text{et} \quad \partial_n \varphi_i = 0 \quad \text{sur } \partial K_i \setminus e.$$

Puis on prend v égal à $\text{grad } \varphi_i$ sur K_i , $i = 1$ et 2 , et à zéro ailleurs.

On voit que

$$b(\mathbf{v}, p - p_h) = \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \subset K} \int_e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_K [p_h]_e d\tau = \| [p_h]_e \|_{L^2(e)}^2,$$

d'où

$$\| [p_h]_e \|_{L^2(e)}^2 \leq \sum_{i=1}^2 \| \mathbf{v} \|_{L^2(K_i)^d} |p - p_h|_{H^1(K_i)}.$$

On combine ceci avec l'estimation

$$\| \mathbf{v} \|_{L^2(K_i)^d} \leq c h_{K_i}^{\frac{1}{2}} \| [p_h] \|_{L^2(e)},$$

et on obtient la majoration désirée.

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \|p - p_h\|_{H_h^1(\Omega)} \leq c \left(\sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \eta_e^2 \right)^{\frac{1}{2}} + c' \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

$$\eta_e \leq c \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |p - p_h|_{H^1(K)}.$$

Estimations optimales, schéma parfaitement conservatif!

Quelques extensions

Cas de milieux inhomogènes

Y. Achdou, C.B.

$$\begin{cases} u + \mu \operatorname{grad} p = f & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

lorsque la fonction μ est positive

- constante par morceaux
- ou régulière par morceaux.

Dans le problème discret et les indicateurs d'erreur, on remplace μ par sa valeur moyenne sur chaque élément K .

Cas de conditions aux limites non homogènes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u} + \mu \operatorname{grad} p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Il n'existe pas d'opérateur de traces possédant des propriétés optimales sur l'espace M_h . Mais on sait maintenant démontrer des propriétés presque optimales.

Indicateurs d'erreur en discrétisation multi-étapes

Introduction à la discrétisation multi-étapes

La notion de discrétisation multi-étapes est un cadre où l'on peut insérer un grand nombre de méthodes ayant la propriété suivante : la discrétisation fait appel à un ou plusieurs problèmes intermédiaires (**non discrets**) avant le problème discret final. L'idée est toujours de calculer des indicateurs d'erreur ne dépendant que de la solution discrète.

- Équation parabolique

Problème intermédiaire : problème semi-discret en temps.

Paramètres de discrétisation : pas de temps, taille du maillage.

A. Bergam, C.B., Z. Mghazli

- Développement asymptotique pour des problèmes de plaques et de coques

Problème intermédiaire : problèmes satisfaits par chaque coefficient du développement.

Paramètres de discrétisation : ordre de troncature, taille du maillage.

M. Dauge, E. Faou

- En géométrie tri-dimensionnelle axisymétrique, couplage de la troncature en Fourier avec une discrétisation par éléments finis des problèmes associés à chaque coefficient de Fourier

Pour traiter ces problèmes de façon efficace, on utilise un développement de Fourier par rapport à la variable angulaire.

Problème intermédiaire : problèmes satisfaits par chaque coefficient de Fourier.

Paramètres de discrétisation : ordre de troncature, taille du maillage.

Z. Belhachmi, C.B., S. Deparis, F. Hecht

- Méthodes de régularisation et de pénalisation

Problème intermédiaire : problème régularisé continu.

Paramètres de discrétisation : paramètre de régularisation, taille du maillage.

C.B., V. Girault, F. Hecht

- Couplage automatique de modèles ??

Plusieurs paramètres indépendants sont impliqués dans la discrétisation et mènent à plusieurs familles d'indicateurs d'erreur.

Le but est de découpler autant que possible les erreurs liées aux différents paramètres. Mais chaque indicateur ne fait intervenir que la solution complètement discrète (pour qu'on puisse le calculer explicitement), donc ceci n'est pas entièrement possible au niveau des estimations.

L'idée de représentation locale de l'erreur doit être abandonnée ou modifiée pour certaines familles d'indicateurs. Toutefois l'optimisation des autres paramètres doit pouvoir s'effectuer dans le cadre de maillages adaptés.

Adaptation en temps et en espace pour une équation parabolique

Optimisation de la discrétisation de l'équation de la chaleur

Travail commun avec A. Bergam et Z. Mghazli

Soit Ω un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne de \mathbb{R}^d , $d = 1, 2$ ou 3 , et soit T un réel positif.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

- Formulation variationnelle (en espace)
- Le problème semi-discret en temps
- Le problème discret
- Analyse a posteriori

Formulation variationnelle (en espace)

Trouver u dans $C^0(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ vérifiant

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

et tel que, pour presque tout t dans $]0, T[$,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (\partial_t u(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) = (f(t), v).$$

Pour toutes données f dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ et u_0 dans $L^2(\Omega)$, l'équation admet une solution unique u dans

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0(0, T; L^2(\Omega)).$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (\partial_t u(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) = (f(t), v).$$

En outre, si l'on définit la norme $[[\cdot]]$ par

$$[[v]]^2(t) = \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 ds,$$

cette solution vérifie pour tout t , $0 \leq t \leq T$,

$$[[u]]^2(t) \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 ds.$$

Et, par suite,

$$\int_0^t \|\partial_t u(s)\|_{H^{-1}(\Omega)^d}^2 ds \leq 2 \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \|f(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 ds \right).$$

Le problème semi-discret en temps

par schéma d'Euler implicite

On divise l'intervalle $[0, T]$ en N intervalles $[t_{n-1}, t_n]$, avec $t_0 = 0$ et $t_N = T$.

$$\tau_n = t_n - t_{n-1}, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N), \quad |\tau| = \max_{1 \leq n \leq N} \tau_n, \quad \sigma_\tau = \max_{2 \leq n \leq N} \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}.$$

Trouver $(u^n)_{0 \leq n \leq N}$ dans $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^N$ vérifiant

$$u^0 = u_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

et tel que, pour $1 \leq n \leq N$,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (u^n, v) + \tau_n (\nabla u^n, \nabla v) = (u^{n-1}, v) + \tau_n (f(t_n), v).$$

Pour toutes données f dans $\mathcal{C}^0(0, T; H^{-1}(\Omega))$ et u_0 dans $L^2(\Omega)$, l'équation admet une solution unique $(u^n)_{0 \leq n \leq N}$.

À toute famille $(v^n)_{0 \leq n \leq N}$, on associe la fonction v_τ affine sur chaque intervalle $[t_{n-1}, t_n]$ et égale à v^n en t_n , $0 \leq n \leq N$.

$$\forall t \in [t_{n-1}, t_n], \quad v_\tau(t) = v^n - \frac{t_n - t}{\tau_n} (v^n - v^{n-1})$$

En outre, si l'on définit la norme $[[\cdot]]_\tau$ par

$$[[v_\tau]]_\tau^2(t_n) = \|v^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{m=1}^n \tau_m \|\nabla v^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2,$$

cette solution vérifie pour $1 \leq n \leq N$,

$$[[u_\tau]]_\tau^2(t_n) \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{m=1}^n \tau_m \|f(t_m)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2.$$

Et, par suite,

$$\sum_{m=1}^n \tau_m \left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n} \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq 2 \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \|f(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 ds \right).$$

Lemme : Pour toute famille $(v^n)_{0 \leq n \leq N}$ de $H^1(\Omega)^n$, on a l'équivalence

$$\frac{1}{4} [[v_\tau]]_\tau^2(t_n) \leq [[v_\tau]]^2(t_n) \leq \frac{1}{2} (1 + \sigma_\tau) [[v_\tau]]_\tau^2(t_n) + \frac{1}{2} \tau_1 \|\nabla v^0\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

Démonstration : On doit comparer les deux quantités

$$\|v^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla v_\tau(s)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 ds \quad \text{et} \quad \|v^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{m=1}^n \tau_m \|\nabla v^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On note que

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\nabla v_\tau(s)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 ds = \frac{\tau_m}{3} \left(\|\nabla v^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\nabla v^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + (\nabla v^m, \nabla v^{m-1}) \right).$$

On conclut en minorant et majorant le dernier terme par diverses inégalités $2ab \geq -\frac{a^2}{\varepsilon} - \varepsilon b^2$ et $2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$.

L'estimation d'erreur a priori se traduit une majoration de l'erreur $[[u - u_\tau]]$ de l'ordre $|\tau|$.

Le problème discret en temps et en espace

On suppose que Ω est un polygone ou un polyèdre et on introduit, pour tout n , $0 \leq n \leq N$, une famille régulière $(\mathcal{T}_{nh})_h$ de triangulations de Ω par des triangles ou des tétraèdres. Il est d'usage que h_n désigne le maximum des diamètres des éléments de \mathcal{T}_{nh} .

$$X_{nh} = \left\{ v_h \in H^1(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_{nh}, v_h|_K \in \mathcal{P}_k(K) \right\}, \quad X_{nh}^0 = X_{nh} \cap H_0^1(\Omega).$$

Π_h opérateur d'interpolation ou de projection à valeurs dans X_{0h} .

Trouver $(u_h^n)_{0 \leq n \leq N}$ dans $X_{0h} \times \prod_{n=1}^N X_{nh}^0$ vérifiant

$$u_h^0 = \Pi_h u_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

et tel que, pour $1 \leq n \leq N$,

$$\forall v_h \in X_{nh}, \quad (u_h^n, v_h) + \tau_n (\nabla u_h^n, \nabla v_h) = (u_h^{n-1}, v_h) + \tau_n (f(t_n), v_h).$$

Pour toutes données f dans $\mathcal{C}^0(0, T; H^{-1}(\Omega))$ et u_0 dans $L^2(\Omega)$, l'équation admet une solution unique $(u_h^n)_{0 \leq n \leq N}$.

Remarques :

1) On peut prouver les mêmes estimations de stabilité que pour la solution u_τ .

2) Sous certaines hypothèses de régularité de la solution u_τ , l'estimation d'erreur a priori se traduit une majoration de l'erreur $[u_\tau - u_{h\tau}]_\tau$ de l'ordre $h^s(h^2 + |\tau|)$ pour tout $s \leq k$, où h désigne le maximum des h_m , $0 \leq m \leq N$.

Analyse a posteriori

On introduit deux familles d'indicateurs d'erreur

- Indicateurs d'erreur en temps

Pour $1 \leq n \leq N$,

$$\eta_n = \left(\frac{\tau_n}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla(u_h^n - u_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

C. Johnson, Y.-Y. Nie, V. Thomée

Ces indicateurs sont locaux en temps mais globaux en espace. Ils sont faciles à calculer dès que la solution discrète est connue jusqu'au temps t_n .

- **Indicateurs d'erreur en espace**

\mathcal{E}_K : ensemble des côtés ou faces de K qui ne sont pas contenus dans $\partial\Omega$.

χ_d : constante égale à 0 en dimension $d = 1$, à 1 en dimension $d \geq 2$.

Pour tout élément K de \mathcal{T}_h ,

$$\eta_{n,K} = h_K \left\| f_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} + \Delta u_h^n \right\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \chi_d \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \| [\partial_\nu u_h^n] \|_{L^2(e)},$$

où f_h^n est une approximation polynomiale par morceaux de $f(t_n)$.

R. Verfürth
C.B., B. Métivet

Une estimation a posteriori de l'erreur

But : On veut majorer $[[u - u_{h\tau}]](t_n)$ en fonction des η_n , des $\eta_{n,K}$ et des données.

$$[[u - u_{h\tau}]](t_n) \leq [[u - u_\tau]](t_n) + [[u_\tau - u_{h\tau}]](t_n).$$

Idée : Une équations du résidu pour majorer chaque terme.

Équation du résidu pour le premier terme :

$$\begin{aligned}\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (\partial_t(u - u_\tau)(t), v) + (\nabla(u - u_\tau)(t), \nabla v) \\ = (f(t) - f(t_n), v) - ((\nabla u_\tau(t) - \nabla u^n), \nabla v).\end{aligned}$$

En prenant v égal à $u - u_\tau$ et en intégrant sur $[0, t_n]$, on obtient la majoration de

$$[[u - u_\tau]](t_n) \leq c \left(\sum_{m=1}^n \int_{t_{m-1}}^{t_m} (\|f(s) - f^n\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla(u_\tau(s) - u^n)\|_{L^2(\Omega)^d}^2) ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On note que, sur l'intervalle $[t_{n-1}, t_n]$,

$$u_\tau(s) - u^n = -\frac{t_n - s}{\tau_n} (u^n - u^{n-1}),$$

d'où

$$\|\nabla(u_\tau - u^n)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega)^d)} = \left(\frac{\tau_n}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla(u^n - u^{n-1})\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Grâce à une inégalité triangulaire, on en déduit

$$\begin{aligned} \|\nabla(u_\tau - u^n)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega)^d)} &\leq \eta_n + \left(\frac{\tau_n}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla(u^n - u_h^n)\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + \left(\frac{\tau_n}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla(u^{n-1} - u_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

On conclut en sommant le carré de cette inégalité et en utilisant la propriété $\tau_n \leq \sigma_\tau \tau_{n-1}$.

π_τ : opérateur d'interpolation à valeurs dans l'espace des fonctions constantes sur chaque intervalle $[t_{n-1}, t_n]$.

Proposition : On a l'estimation a posteriori suivante, pour $1 \leq n \leq N$,

$$\begin{aligned} [[u - u_\tau]](t_n) &\leq c \left((1 + \sigma_\tau)^{\frac{1}{2}} [[u_\tau - u_{h_\tau}]](t_n) + \left(\sum_{m=1}^n \eta_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))} \right). \end{aligned}$$

Équation du résidu pour le second terme :

$$\begin{aligned} \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall v_h \in X_h^0, \\ (u^n - u_h^n, v) + \tau_n (\nabla(u^n - u_h^n), \nabla v) \\ = (u^{n-1} - u_h^{n-1}, v) \\ + \tau_n \sum_{K \in \mathcal{T}_{nh}} \left(\int_K \left(f(t_n) - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} + \Delta u_h^n \right) (\mathbf{x}) (v - v_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_\nu u_h^n](r) (v - v_h)(r) \, dr \right). \end{aligned}$$

En prenant v égal à $u^n - u_h^n$ et v_h égal à une “bonne” approximation de v , on obtient une borne supérieure pour $[[u_\tau - u_{h\tau}]]_\tau(t_n)$.

Choix de v_h :

- En dimension $d = 1$, on prend v_h égal à l'interpolé de Lagrange de v aux extrémités de K , de sorte que

$$\int_e [\partial_\nu u_h^n](r)(v - v_h)(r) dr = 0.$$

- En dimension $d \geq 2$, on prend v_h égal à l'image de v par l'opérateur de Clément.

D'où l'apparition de χ_d .

Proposition : On a l'estimation a posteriori suivante, pour $1 \leq n \leq N$,

$$\begin{aligned} [[u_\tau - u_{h\tau}]](t_n) \leq c \left(\sum_{m=1}^n \tau_m \sum_{K \in \mathcal{T}_{mh}} \left(\eta_{m,K}^2 + h_K^2 \|f(t_m) - f_h^m\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ + c \|u_0 - \Pi_h u_0\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Théorème : On a l'estimation a posteriori globale suivante, pour $1 \leq n \leq N$,

$$[[u - u_{h\tau}]](t_n) \leq c \left(\sum_{m=1}^n \eta_m^2 + \tau_m \sum_{K \in \mathcal{T}_{mh}} \left(\eta_{m,K}^2 + h_K^2 \|f(t_m) - f_h^m\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} + c \left(\|u_0 - \Pi_h u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))} \right).$$

Remarque : Sont également majorées par le membre de droite de l'inégalité précédente

- les quantités

$$[[u - u_\tau]](t_n) \quad \text{et} \quad [[u_\tau - u_{h\tau}]](t_n),$$

- les quantités

$$\|\partial_t(u - u_\tau)\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))} \quad \text{et} \quad \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}.$$

Une majoration des indicateurs

Idée : Dans la première équation du résidu, on prend v égal à $u^n - u^{n-1}$.

$$\begin{aligned} \|\nabla(u_h^n - u_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega)^d} &\leq \|\nabla(u^n - u_h^n)\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\nabla(u^{n-1} - u_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + \|\nabla(u^n - u^{n-1})\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Proposition : On a l'estimation suivante, pour $1 \leq n \leq N$,

$$\begin{aligned} \eta_n &\leq c \left(\|\nabla(u^n - u_h^n)\|_{L^2(\Omega)^d} + \sigma_\tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla(u^{n-1} - u_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega)^d} \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla(u - u_\tau)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega)^d)} + \|\partial_t(u - u_\tau)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^{-1}(\Omega))} \right. \\ &\quad \left. + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^{-1}(\Omega))} \right). \end{aligned}$$

Estimation locale en temps !

Idée : Dans la seconde équation du résidu, on prend v successivement égal à

$$v_K = \left(f_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} + \Delta u_h^n \right) \psi_K \quad \text{sur } K, \quad 0 \quad \text{ailleurs,}$$

$$v_e = \mathcal{L}_{e,\kappa} \left([\partial_\nu u_h^n] \psi_e \right) \quad \text{sur } \kappa \in \{K, K'\}, \quad 0 \quad \text{ailleurs.}$$

Proposition : On a l'estimation suivante, pour $1 \leq n \leq N$ et pour tout élément K de \mathcal{T}_{nh} ,

$$\eta_{n,K} \leq c \left(\|\nabla(u^n - u_h^n)\|_{L^2(\omega_K)^d} + \left\| \frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n} \right\|_{H^{-1}(\omega_K)} + h_K \|f(t_n) - f_h^n\|_{L^2(\omega_K)} \right),$$

où ω_K désigne l'union des éléments de \mathcal{T}_{nh} partageant au moins un côté ou une face avec K .

Estimation locale en temps et en espace !

Conclusions

- Estimations parfaitement optimales au sens indiqué précédemment.

En particulier, la quantité

$$[[u - u_\tau]](t_n) + [[u_\tau - u_{h\tau}]](t_n) \\ + \|\partial_t(u - u_\tau)\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))} + \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}$$

est équivalente, aux termes portant sur les données près, à la quantité

$$\left(\sum_{m=1}^n \eta_m^2 + \tau_m \sum_{K \in \mathcal{T}_{mh}} \eta_{m,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

avec des constantes d'équivalence indépendantes de τ et h .

- Les indicateurs η_m représentent l'erreur locale en temps, les indicateurs $\eta_{m,K}$ représentent l'erreur locale en temps et en espace.

\implies adaptation du pas de temps et du maillage.

- Indicateurs d'erreur faciles à calculer.

Extensions

- Une équation de la chaleur non linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(\alpha(u) \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

où α est une fonction continûment dérivable de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , positive et bornée.

- Équations de Stokes et de Navier–Stokes

C.B., R. Verfürth

La difficulté vient ici de la faible régularité de la pression, qui ne peut être bornée en norme $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

- **Équations de Darcy instationnaire**

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} + \text{grad } p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g & \text{sur } \partial\Omega, \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

C.B., V. Girault, K.R. Rajagopal

- **Une équation des ondes d'ordre 2**

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \text{et} \quad (\partial_t u)|_{t=0} = v_0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

C.B., E. Süli

Optimisation du paramètre de pénalisation pour le problème de Stokes

Travail commun avec V. Girault et F. Hecht

La méthode de pénalisation fournit un algorithme de résolution efficace pour la résolution numérique du problème de Stokes. Toutefois le paramètre qui intervient dans cette méthode est le plus souvent choisi de façon tout-à-fait arbitraire.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d = 2$ ou 3 , à frontière lipschitzienne.

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \text{grad } p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Les inconnues sont la vitesse \mathbf{u} et la pression p .

Formulation variationnelle

Trouver (\mathbf{u}, p) dans $H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ vérifiant

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{u} : \text{grad } \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v})(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{u} : \text{grad } \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v})(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

L'ellipticité de la première forme bilinéaire et la condition inf-sup vérifiée par la second impliquent que

Pour toute donnée \mathbf{f} dans $H^{-1}(\Omega)^d$, ce problème admet une solution unique. En outre, cette solution vérifie

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d} + \|p\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d}.$$

Le problème pénalisé

On fixe un paramètre ε , $0 < \varepsilon \leq 1$.

Trouver $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$ dans $H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ vérifiant

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{u}_\varepsilon : \text{grad } v \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\text{div } v)(\mathbf{x}) p_\varepsilon(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \varepsilon \int_{\Omega} p_\varepsilon(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

La deuxième équation s'écrit

$$p_\varepsilon = -\varepsilon^{-1} \text{div } \mathbf{u}_\varepsilon.$$

$$p_\varepsilon = -\varepsilon^{-1} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon.$$

Par suite, le problème pénalisé s'écrit de façon équivalente

Trouver \mathbf{u}_ε dans $H_0^1(\Omega)^d$ vérifiant

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} \mathbf{u}_\varepsilon : \operatorname{grad} v \, dx + \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}) (\operatorname{div} v)(\mathbf{x}) \, dx \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot v(\mathbf{x}) \, dx,$$

Trouver p_ε dans $L_0^2(\Omega)$ vérifiant

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \varepsilon \int_{\Omega} p_\varepsilon(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, dx = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, dx.$$

Pour toute donnée f dans $H^{-1}(\Omega)^d$, ce problème admet une solution unique.

Ne requiert aucune condition inf-sup !

Toutefois, si l'on n'utilise pas la condition inf-sup, on n'a pas d'estimation indépendante de ε de la quantité $\|p_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$.

On peut établir des estimations d'erreur a priori entre les solutions (u, p) et $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$, de l'ordre de ε .

V. Girault, P.-A. Raviart

Le problème discret

$(\mathcal{T}_h)_h$: famille régulière de triangulations de Ω par des triangles ou des tétraèdres.

$$X_h \subset H_0^1(\Omega)^d, \quad M_h \subset L_0^2(\Omega).$$

On suppose X_h et M_h construits à partir de la triangulation \mathcal{T}_h .

Trouver $(\mathbf{u}_{\varepsilon h}, p_{\varepsilon h})$ dans $X_h \times M_h$ vérifiant

$$\forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \int_{\Omega} \mathbf{grad} \mathbf{u}_{\varepsilon h} : \mathbf{grad} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) p_{\varepsilon h}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}_{\varepsilon h})(\mathbf{x}) q_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \varepsilon \int_{\Omega} p_{\varepsilon h}(\mathbf{x}) q_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Soit Π_h l'opérateur de projection orthogonale de $L_0^2(\Omega)$ sur M_h . La deuxième équation s'écrit

$$p_{\varepsilon h} = -\varepsilon^{-1} \Pi_h(\operatorname{div} \mathbf{u}_{\varepsilon h}).$$

Le problème discret s'écrit de façon équivalente

Trouver $\mathbf{u}_{\varepsilon h}$ dans X_h vérifiant

$$\forall v_h \in X_h, \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} \mathbf{u}_{\varepsilon h} : \operatorname{grad} v_h \, d\mathbf{x} + \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} \Pi_h(\operatorname{div} \mathbf{u}_{\varepsilon h})(\mathbf{x}) \Pi_h(\operatorname{div} v_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

Trouver $p_{\varepsilon h}$ dans M_h vérifiant

$$\forall q_h \in M_h, \quad \varepsilon \int_{\Omega} p_{\varepsilon h}(\mathbf{x}) q_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}_{\varepsilon h})(\mathbf{x}) q_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Pour toute donnée f dans $H^{-1}(\Omega)^d$, ce problème admet une solution unique.

Ne requiert aucune condition inf-sup !

Fournit un algorithme efficace de résolution du problème discret, où les inconnues sont découplées !

Toutefois le nombre de condition de la matrice à inverser dépend grandement du choix de ε .

S'il existe une condition inf-sup entre les espaces X_h et M_h , on peut établir des estimations d'erreur a priori entre les solutions (u_h, p_h) et $(u_{\varepsilon h}, p_{\varepsilon h})$.

Deux familles d'indicateurs d'erreur

- Indicateur d'erreur lié au terme de pénalisation

$$\eta_\varepsilon = \varepsilon \|p_{\varepsilon h}\|_{L^2(\Omega)}.$$

- Indicateurs d'erreur liés aux éléments finis

\mathcal{E}_K : ensemble des côtés ou faces de K qui ne sont pas contenus dans $\partial\Omega$.

Pour tout élément K de \mathcal{T}_h ,

$$\begin{aligned} \eta_K = h_K & \| \mathbf{f}_h + \Delta \mathbf{u}_{\varepsilon h} - \mathbf{grad} p_{\varepsilon h} \|_{L^2(K)^d} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \| [\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{u}_{\varepsilon h} - p_{\varepsilon h} \mathbf{n}] \|_{L^2(e)^d} + \| \operatorname{div} \mathbf{u}_{\varepsilon h} \|_{L^2(K)}, \end{aligned}$$

où \mathbf{f}_h est une approximation polynomiale par morceaux de \mathbf{f} .

Une estimation a posteriori de l'erreur

But : On veut majorer l'erreur entre (\mathbf{u}, p) et $(\mathbf{u}_{\varepsilon h}, p_{\varepsilon h})$ en fonction de η_ε , des η_K et des données.

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\varepsilon h}|_{H^1(\Omega)^d} \leq |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon|_{H^1(\Omega)^d} + |\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_{\varepsilon h}|_{H^1(\Omega)^d},$$

$$\|p - p_{\varepsilon h}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|p - p_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|p_\varepsilon - p_{\varepsilon h}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Idée : Une équations du résidu pour majorer chaque terme.

Équation du résidu pour le premier terme :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \int_{\Omega} \text{grad}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon) : \text{grad} v \, dx - \int_{\Omega} (\text{div} v)(\mathbf{x}) (p - p_\varepsilon)(\mathbf{x}) \, dx = 0,$$

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad - \int_{\Omega} (\text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon))(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, dx = \varepsilon \int_{\Omega} p_\varepsilon(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, dx.$$

Les propriétés de stabilité usuelles du problème de Stokes donnent

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon|_{H^1(\Omega)^d} + \|p - p_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c \varepsilon \|p_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}.$$

On conclut par une inégalité triangulaire.

Proposition : On a l'estimation a posteriori suivante

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon|_{H^1(\Omega)^d} + \|p - p_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left(\eta_\varepsilon + \varepsilon \|p_\varepsilon - p_{\varepsilon h}\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Équation du résidu pour le second terme :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \text{grad} (u_{\varepsilon} - u_{\varepsilon h}) : \text{grad} v \, dx + \dots$$

On utilise les arguments usuels pour l'estimation a posteriori de l'erreur dans le problème de Stokes (en particulier, on introduit une approximation v_h de la fonction v dans X_h).

Proposition : On suppose que l'espace X_h contient

$$Y_h = \left\{ v_h \in H_0^1(\Omega)^d; \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathcal{P}_1(K)^d \right\}.$$

On a l'estimation a posteriori suivante

$$\|u_{\varepsilon} - u_{\varepsilon h}\|_{H^1(\Omega)^d} + \|p_{\varepsilon} - p_{\varepsilon h}\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left(\eta_{\varepsilon} + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)^d}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Une majoration des indicateurs

Idée : Dans la première équation du résidu

$$\forall q \in L_0^2(\Omega),$$

$$\varepsilon \int_{\Omega} p_{\varepsilon h}(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\varepsilon \int_{\Omega} (p_{\varepsilon} - p_{\varepsilon h})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\varepsilon}))(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

on prend q égal à $p_{\varepsilon h}$.

Proposition : On a l'estimation suivante

$$\eta_{\varepsilon} \leq c |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\varepsilon}|_{H^1(\Omega)^d} + \varepsilon \|p_{\varepsilon} - p_{\varepsilon h}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Idée : Dans la seconde équation du résidu, on prend v successivement égal à

$$v_K = (\mathbf{f}_h + \Delta \mathbf{u}_{\varepsilon h} - \text{grad } p_{\varepsilon h}) \psi_K \quad \text{sur } K, \quad 0 \quad \text{ailleurs,}$$

$$v_e = \mathcal{R}([\partial_\nu \mathbf{u}_{\varepsilon h} - p_{\varepsilon h} \mathbf{n}] \psi_e) \quad \text{sur } K \cup K', \quad 0 \quad \text{ailleurs,}$$

puis q égal à

$$q_K = \text{div } \mathbf{u}_{\varepsilon h} \quad \text{sur } K, \quad 0 \quad \text{ailleurs.}$$

Proposition : On a l'estimation suivante, pour tout élément K de \mathcal{T}_h ,

$$\eta_K \leq c \left(|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon|_{H^1(K)^d} + |\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_{\varepsilon h}|_{H^1(\omega_K)^d} \right. \\ \left. + \|p_\varepsilon - p_{\varepsilon h}\|_{L^2(\Omega_K)} + h_K \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\omega_K)^d} \right),$$

où ω_K désigne l'union des éléments de \mathcal{T}_{nh} partageant au moins un côté ou une face avec K .

Estimations optimales, une estimation locale en espace !

Quelques expériences numériques

réalisées avec le code FreeFem++

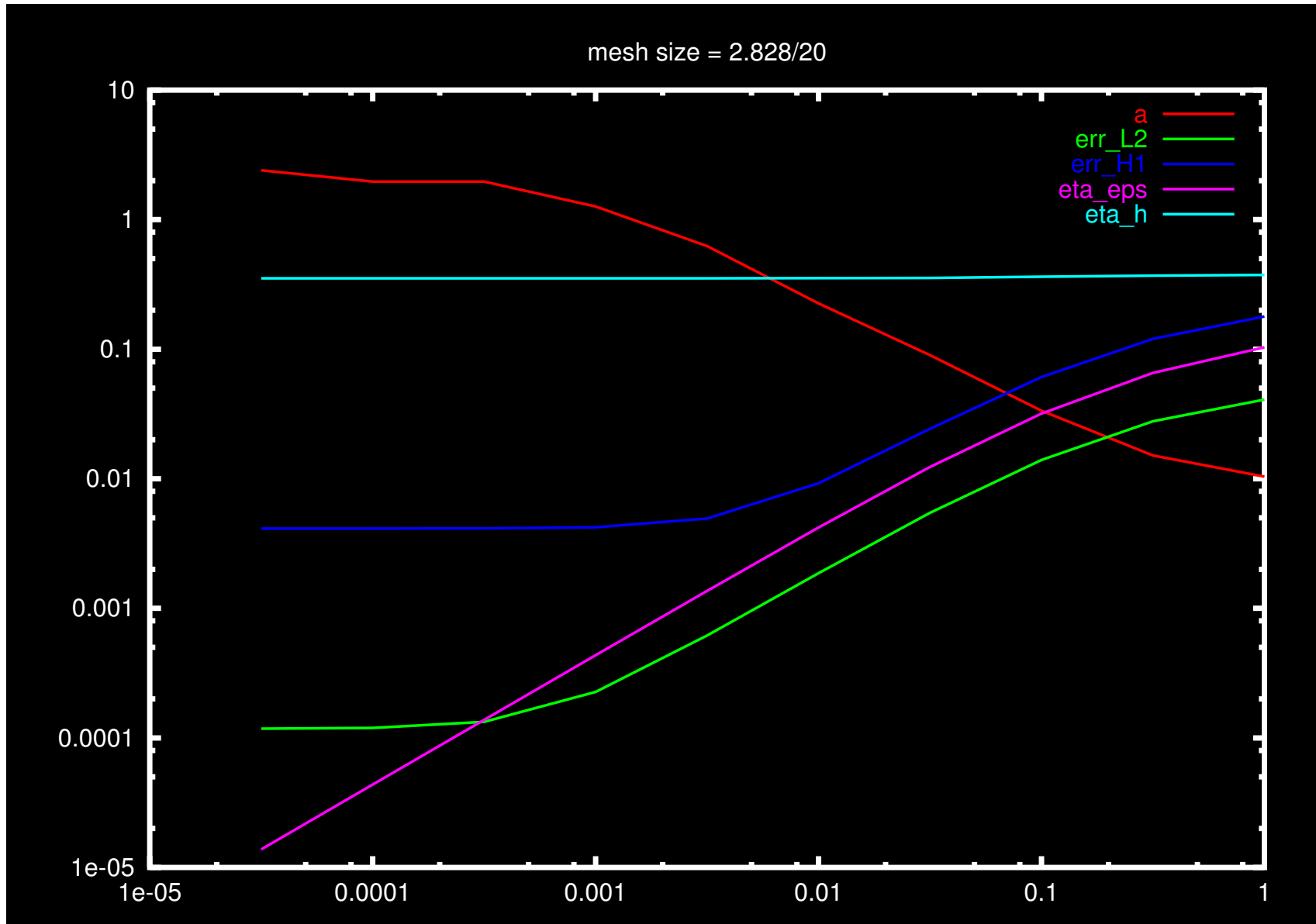
F. Hecht, O. Pironneau

Élément fini de Taylor–Hood, maillage uniforme

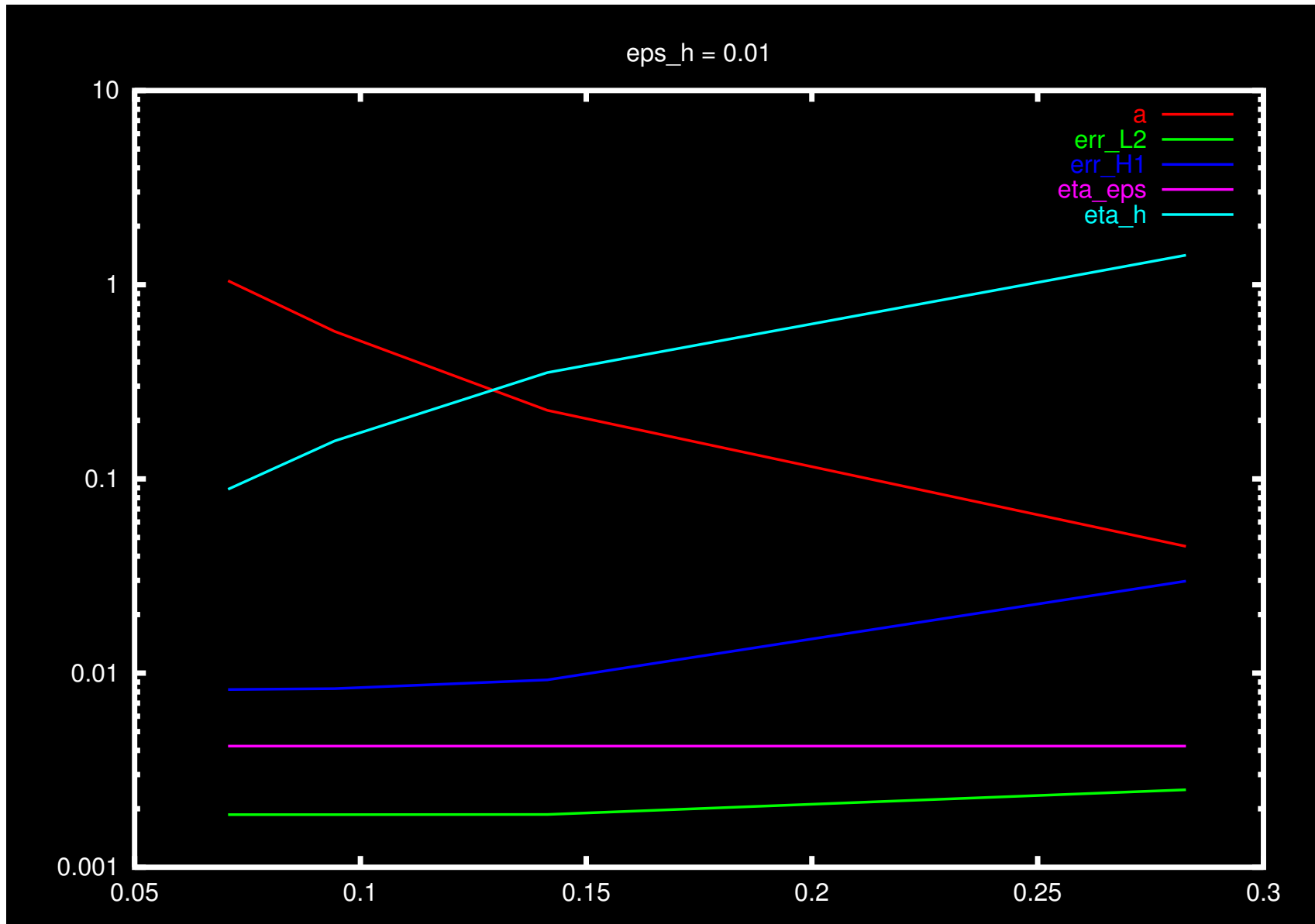
Solution régulière dans un carré

- Influence du paramètre de pénalisation
- Influence du maillage

$$h = \sqrt{2} 10^{-1}$$



$$\varepsilon = 10^{-2}$$



Extensions

- Pénalisation locale

On remplace $\varepsilon \int_{\Omega} p(\mathbf{x})q(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ par

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \varepsilon_K \int_K p(\mathbf{x})q(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

+ deux types d'indicateurs d'erreur locaux.

Cette méthode oblige à travailler avec des espaces discrets de pression discontinue et n'apporte aucun avantage par rapport à la pénalisation globale.

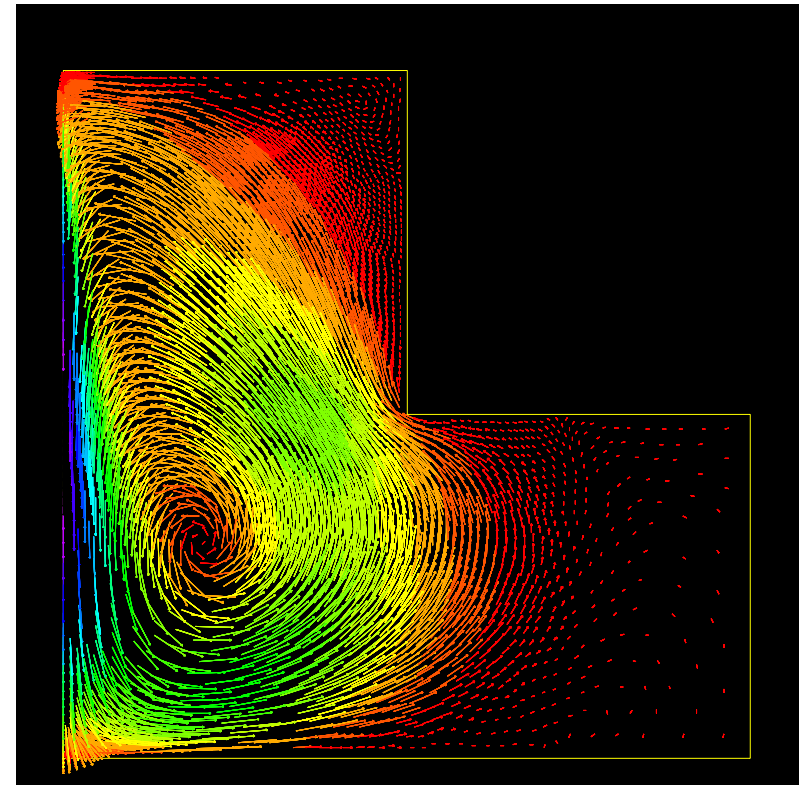
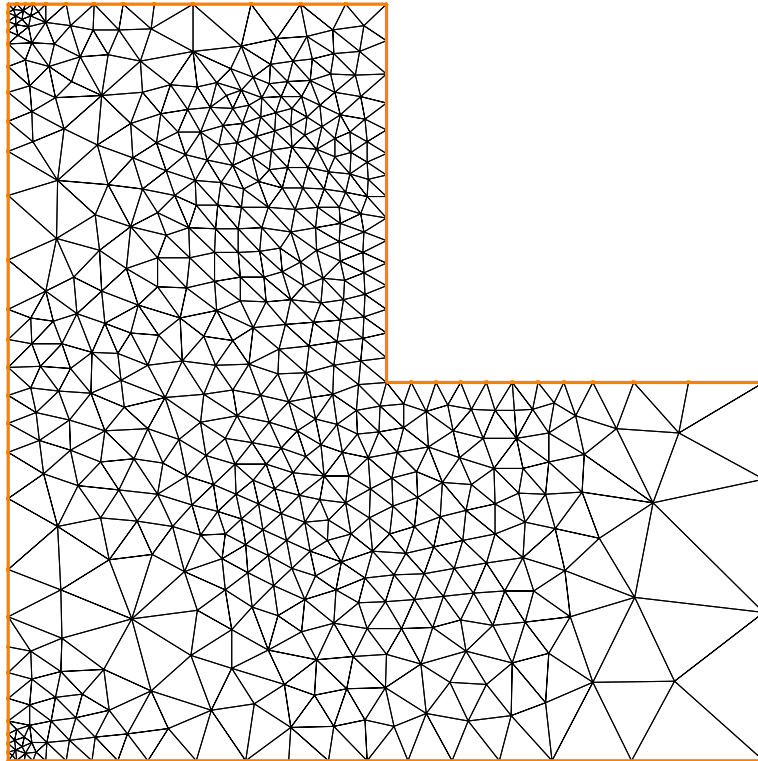
- Équations de Navier–Stokes

**J. Pousin, J. Rappaz
R. Verfürth**

Aucune difficulté particulière.

Données : viscosité $\nu = 10^{-2}$ et vitesse tangentielle sur bord gauche non nulle.

$$\varepsilon = 0,14 \times 10^{-2}$$



- Équations des fluides de grade 2

M. Amara, C.B., V. Girault, F. Hecht

Dans un ouvert Ω borné de \mathbb{R}^2 , on considère le problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta \mathbf{u} + \text{grad } p + z \times \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nu z + \alpha \mathbf{u} \cdot \nabla z = \alpha \text{rot } \mathbf{f} + \nu \text{rot } \mathbf{u} & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Ajout d'une terme de régularisation à l'équation de transport.

Un peu d'axisymétrie

Troncature en Fourier et adaptation de maillage

Travail commun avec Z. Belhachmi, S. Deparis et F. Hecht

Toute solution des équations de Navier–Stokes dans un ouvert tridimensionnel axisymétrique (invariant par rotation autour d'un axe) admet une décomposition en série de Fourier par rapport à la variable angulaire. Les coefficients de Fourier sont alors solution d'un système couplé sur le domaine méridien. Nous proposons une discrétisation basée sur la **troncature en Fourier** et des **éléments finis** bidimensionnels.

Efficacité : À précision imposée, le nombre total de degrés de liberté est beaucoup plus faible que pour une discrétisation tridimensionnelle.

- Développement en série de Fourier
- Troncature en Fourier
- Discrétisation par éléments finis
- Analyse a posteriori de la discrétisation
- Extension aux équations de Navier–Stokes

Développement en série de Fourier

Ω : ouvert borné connexe tridimensionnel, invariant par rotation autour de l'axe $x = y = 0$.

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \text{grad } p = f & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Inconnues : vitesse u , pression p .

Pour toute donnée (f, g) dans $H^{-1}(\Omega)^3 \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3$ vérifiant

$$\int_{\partial\Omega} g \cdot \mathbf{n} \, d\tau = 0,$$

ce problème admet une solution unique (u, p) dans $H^1(\Omega)^3 \times L_0^2(\Omega)$.

Le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , avec $r \geq 0$ et $-\pi \leq \theta < \pi$, est défini par

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Il existe alors un domaine méridien ω dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que

$$\Omega = \left\{ (r, \theta, z); (r, z) \in \omega \text{ and } -\pi \leq \theta < \pi \right\}.$$

On suppose la frontière $\partial\omega$ lipschitzienne.

γ_0 : intérieur de l'intersection de $\partial\omega$ avec l'axe $r = 0$, $\gamma = \partial\omega \setminus \gamma_0$.

M. Azaïez, C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday

Développement en série de Fourier des données

$$\mathbf{f}(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{f}^k(r, z) e^{ik\theta}, \quad \mathbf{g}(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{g}^k(r, z) e^{ik\theta}.$$

Développement en série de Fourier de la solution

$$\mathbf{u}(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{u}^k(r, z) e^{ik\theta}, \quad p(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p^k(r, z) e^{ik\theta}.$$

$$-\Delta_k \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\partial_r^2 v_r - \frac{1}{r} \partial_r v_r - \partial_z^2 v_r + \frac{1+k^2}{r^2} v_r + \frac{2ik}{r^2} v_\theta \\ -\partial_r^2 v_\theta - \frac{1}{r} \partial_r v_\theta - \partial_z^2 v_\theta + \frac{1+k^2}{r^2} v_\theta - \frac{2ik}{r^2} v_r \\ -\partial_r^2 v_z - \frac{1}{r} \partial_r v_z - \partial_z^2 v_z + \frac{k^2}{r^2} v_z \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}_k \mathbf{v} = \partial_r v_r + \frac{1}{r} v_r + \frac{ik}{r} v_\theta + \partial_z v_z, \quad \operatorname{grad}_k q = \begin{pmatrix} \partial_r q \\ \frac{ik}{r} q \\ \partial_z q \end{pmatrix}.$$

Le couple (\mathbf{u}, p) est solution du problème de Stokes si et seulement si chaque couple (\mathbf{u}^k, p^k) , $k \in \mathbb{Z}$, est solution du système bidimensionnel avec quatre inconnues scalaires

$$\begin{cases} -\nu \Delta_k \mathbf{u}^k + \operatorname{grad}_k p^k = \mathbf{f}^k & \text{in } \omega, \\ \operatorname{div}_k \mathbf{u}^k = 0 & \text{in } \omega, \\ \mathbf{u}^k = \mathbf{g}^k & \text{on } \gamma. \end{cases}$$

Principale difficulté : la mesure de Lebesgue $dx dy dz$ est transformée en une mesure à poids $r dr d\theta dz$.

Espaces de Sobolev à poids

$$L_1^2(\omega) = \left\{ v : \omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable; } \int_{\omega} |v(r, z)|^2 r dr dz < +\infty \right\},$$

$$L_{-1}^2(\omega) = \left\{ v : \omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable; } \int_{\omega} |v(r, z)|^2 r^{-1} dr dz < +\infty \right\}$$

$$H_1^1(\omega) = \left\{ v \in L_1^2(\omega); \partial_r v \in L_1^2(\omega) \text{ et } \partial_z v \in L_1^2(\omega) \right\},$$

$$V_1^1(\omega) = H_1^1(\omega) \cap L_{-1}^2(\omega).$$

Les espaces variationnels de base sont alors définis par

$$L_{10}^2(\omega) = \left\{ q \in L_1^2(\omega); \int_{\omega} q(r, z) r dr dz = 0 \right\},$$

$$H_{1\Diamond}^1(\omega) = \left\{ v \in H_1^1(\omega); v = 0 \text{ on } \gamma \right\}, \quad V_{1\Diamond}^1(\omega) = V_1^1(\omega) \cap H_{1\Diamond}^1(\omega).$$

Enfin, on introduit les espaces dépendant de k

$$\mathbf{H}_{(k)}^1(\omega) = \begin{cases} V_1^1(\omega) \times V_1^1(\omega) \times H_1^1(\omega) & \text{if } k = 0, \\ \left\{ (v_r, v_\theta, v_z) \in H_1^1(\omega) \times H_1^1(\omega) \times V_1^1(\omega); v_r + ik v_\theta \in L_{-1}^2(\omega) \right\} & \text{if } |k| = 1, \\ V_1^1(\omega) \times V_1^1(\omega) \times V_1^1(\omega) & \text{if } |k| \geq 2, \end{cases}$$

ainsi que l'espace $L_{(k)}^2(\omega)$, égal à $L_{10}^2(\omega)$ si k est égal à zéro, à $L_1^2(\omega)$ sinon.

$$\mathbf{H}_{(k)\Diamond}^1(\omega) = \mathbf{H}_{(k)}^1(\omega) \cap H_{1\Diamond}^1(\omega)^3.$$

Formulation variationnelle

Trouver (\mathbf{u}^k, p^k) dans $\mathbf{H}_{(k)}^1(\omega) \times L_{(k)}^2(\omega)$, avec \mathbf{u}^k égal à \mathbf{g}^k sur γ , tel que

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{(k)\diamond}^1(\omega), \quad \mathcal{A}_k(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) + \mathcal{B}_k(\mathbf{v}, p^k) = \int_{\omega} (\mathbf{f}^k \cdot \bar{\mathbf{v}})(r, z) r dr dz,$$

$$\forall q \in L_{(k)}^2(\omega), \quad \bar{\mathcal{B}}_k(\mathbf{u}^k, q) = 0.$$

$$a_0(u, v) = \nu \int_{\omega} (\partial_r u \partial_r \bar{v} + \partial_z u \partial_z \bar{v})(r, z) r dr dz.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= a_0(u_r, v_r) + a_0(u_{\theta}, v_{\theta}) + a_0(u_z, v_z) \\ &+ \nu \int_{\omega} \left((1 + k^2) (u_r \bar{v}_r + u_{\theta} \bar{v}_{\theta}) + 2ik (u_{\theta} \bar{v}_r - u_r \bar{v}_{\theta}) \right) (r, z) r^{-1} dr dz \\ &+ \nu k^2 \int_{\omega} u_z(r, z) \bar{v}_z(r, z) r^{-1} dr dz. \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_k(\mathbf{v}, q) = - \int_{\omega} q(r, z) (\partial_r \bar{v}_r + r^{-1} \bar{v}_r + ik r^{-1} \bar{v}_{\theta} + \partial_z \bar{v}_z)(r, z) r dr dz.$$

- L'espace $\mathbf{H}_{(k)}^1(\omega)$ est muni de la norme $\mathcal{A}_k(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}$ (qui est équivalente à la norme $\|\mathbf{v} e^{ik\theta}\|_{H^1(\Omega)^3}$).

⇒ ellipticité de la forme $\mathcal{A}_k(\cdot, \cdot)$

- La condition inf-sup suivante se déduit de son analogue tridimensionnel : il existe une constante $\beta > 0$ telle que

$$\forall q \in L_{(k)}^2(\omega), \quad \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{(k)}^1(\omega)} \frac{\mathcal{B}_k(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_{(k)}^1(\omega)}} \geq \beta \|q\|_{L_1^2(\omega)}.$$

Chaque problème bidimensionnel admet une solution unique (\mathbf{u}^k, p^k) .

Troncature en Fourier

\mathcal{K} : paramètre de troncature

$$\mathbf{u}_{\mathcal{K}}(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\mathcal{K}}^{\mathcal{K}} \mathbf{u}^k(r, z) e^{ik\theta}, \quad p_{\mathcal{K}}(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\mathcal{K}}^{\mathcal{K}} p^k(r, z) e^{ik\theta}.$$

$$H^{m,\sigma}(\Omega) = \left\{ v \in H^m(\Omega); \partial_{\theta}^{\ell} v \in H^m(\Omega), 1 \leq \ell \leq \sigma \right\},$$

+ extension évidente aux espaces définis sur $\partial\Omega$.

Proposition. On suppose que la donnée (\mathbf{f}, \mathbf{g}) appartient à $H^{-1,\sigma}(\Omega)^3 \times H^{\frac{1}{2},\sigma}(\partial\Omega)^3$, $\sigma \geq 0$. On a l'estimation d'erreur suivante

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}}\|_{H^1(\Omega)^3} + \|p - p_{\mathcal{K}}\|_{L^2(\Omega)} \leq c \mathcal{K}^{-\sigma} \left(\|\mathbf{f}\|_{H^{-1,\sigma}(\Omega)^3} + \|\mathbf{g}\|_{H^{\frac{1}{2},\sigma}(\partial\Omega)^3} \right).$$

Troncature en Fourier approchée

$$\mathbf{f}^k(r, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathbf{f}(r, \theta, z) e^{-ik\theta} d\theta.$$

Lorsque calculer l'intégrale ci-dessus ou son analogue pour g est impossible, on utilise une formule de quadrature. Pour le paramètre \mathcal{K} introduit précédemment, on définit les nœuds $\theta_m = \frac{2m\pi}{2\mathcal{K}+1}$, $-\mathcal{K} \leq m \leq \mathcal{K}$, et on pose

$$\mathbf{f}_\star^k(r, z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\mathcal{K}+1} \sum_{m=-\mathcal{K}}^{\mathcal{K}} \mathbf{f}(r, \theta_m, z) e^{-ik\theta_m},$$

$$\mathbf{g}_\star^k(r, z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\mathcal{K}+1} \sum_{m=-\mathcal{K}}^{\mathcal{K}} \mathbf{g}(r, \theta_m, z) e^{-ik\theta_m}$$

$(\mathbf{u}_\star^k, p_\star^k)$: solution du problème bidimensionnel avec donnée $(\mathbf{f}_\star^k, \mathbf{g}_\star^k)$.

$$\mathbf{u}_{\mathcal{K}\star}(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\mathcal{K}}^{\mathcal{K}} \mathbf{u}_{\star}^k(r, z) e^{ik\theta}, \quad p_{\mathcal{K}\star}(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\mathcal{K}}^{\mathcal{K}} p_{\star}^k(r, z) e^{ik\theta}.$$

Proposition. On suppose que la donnée (f, g) appartient à $H^{-1, \sigma}(\Omega)^3 \times H^{\frac{1}{2}, \sigma}(\partial\Omega)^3$, $\sigma > \frac{1}{2}$. On a l'estimation d'erreur suivante

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}\star}\|_{H^1(\Omega)^3} + \|p - p_{\mathcal{K}\star}\|_{L^2(\Omega)} \leq c \mathcal{K}^{-\sigma} \left(\|f\|_{H^{-1, \sigma}(\Omega)^3} + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}, \sigma}(\Omega)^3} \right).$$

Discrétisation par éléments finis

$(\mathcal{T}_h)_h$: famille régulière de triangulations of ω (par des triangles).

$$X_h \subset H_1^1(\omega), \quad M_h \subset L_1^2(\Omega).$$

L'intersection de X_h et $V_1^1(\omega)$ est constituée des fonctions de X_h qui s'annulent sur γ_0 , l'intersection de X_h et $H_{1\Diamond}^1(\omega)$ est constituée des fonctions de X_h qui s'annulent sur γ .

$$\mathbf{H}_{h(k)} = (X_h)^3 \cap \mathbf{H}_{(k)}^1(\omega), \quad \mathbf{H}_{h(k)}^\diamond = (X_h)^3 \cap \mathbf{H}_{(k)\diamond}^1(\omega),$$

$$M_{h(k)} = M_h \cap L_{(k)}^2(\omega).$$

i_h^γ : opérateur d'interpolation de Lagrange sur γ à valeurs dans l'espace des traces des fonctions de X_h .

Le problème discret

Trouver (\mathbf{u}_h^k, p_h^k) dans $\mathbf{H}_{h(k)} \times M_{h(k)}$, avec \mathbf{u}_h^k égal à $i_h^\gamma \mathbf{g}_*^k$ on γ , tel que

$$\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_{h(k)}^\diamond \quad \mathcal{A}_k(\mathbf{u}_h^k, \mathbf{v}_h) + \mathcal{B}_k(\mathbf{v}_h, p_h^k) = \int_\omega (\mathbf{f}_*^k \cdot \bar{\mathbf{v}}_h)(r, z) r dr dz,$$

$$\forall q_h \in M_{h(k)} \quad \bar{\mathcal{B}}_k(\mathbf{u}_h^k, q_h) = 0.$$

Deux choix possibles d'espaces discrets ont été considérés.

Premier couple d'espaces : Cas de pressions continues

$$X_h^{(1)} = \{v_h \in C^0(\bar{\omega}); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathcal{P}_2(K)\},$$

$$M_h^{(1)} = \{q_h \in C^0(\bar{\omega}); \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in \mathcal{P}_1(K)\}.$$

Second couple d'espaces : Cas de pressions discontinues

$$X_h^{(2)} = \{v_h \in C^0(\bar{\omega}); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in P_K\},$$

$$M_h^{(2)} = \{q_h \in L_1^2(\omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in \mathcal{P}_1(K)\},$$

où P_K désigne l'espace engendré par $\mathcal{P}_2(K)$ et la fonction bulle sur K .

L'analyse numérique du problème discret requiert quelques outils de base en éléments finis :

- propriétés d'approximation de l'opérateur d'interpolation de Lagrange dans les normes à poids,
- inégalités inverses à poids,
- propriétés d'un opérateur de Clément à poids

B. Mercier, G. Raugel

Dans le cas usuel, ces propriétés sont établies par passage à un triangle de référence. Dans le cas à poids, ces propriétés sont établies par trois passages à un triangle de référence.

En effet, trois types de triangles doivent être considérés.

- **Type 1** : K n'intersecte pas $\bar{\gamma}_0$

$$\frac{\max_{\mathbf{x} \in K} r(\mathbf{x})}{\min_{\mathbf{x} \in K} r(\mathbf{x})} \leq c \quad \text{et} \quad \min_{\mathbf{x} \in K} r(\mathbf{x}) \geq c' h_K.$$

- **Type 2** : K a un côté contenu dans $\bar{\gamma}_0$

Si a_2 et a_3 désignent les extrémités de ce côté, r est égal à $r(a_1) \lambda_1$, de sorte que

$$\forall \mathbf{x} \in K, \quad c h_K \lambda_1 \leq r(\mathbf{x}) \leq c' h_K \lambda_1.$$

- **Type 3** : K a seulement un sommet contenu dans $\bar{\gamma}_0$

Si a_1 désigne ce sommet,

$$\forall \mathbf{x} \in K, \quad c h_K (\lambda_2 + \lambda_3) \leq r(\mathbf{x}) \leq c' h_K (\lambda_2 + \lambda_3).$$

M. Bercovier, O. Pironneau, R. Verfürth, J. Boland, R. Nicolaides

Lemma. Il existe une constante $\tilde{\beta}$ indépendante de h telle qu'on ait la condition inf-sup suivante

$$\forall q_h \in M_{h(k)}, \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_{h(k)}} \frac{\mathcal{B}_k(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}_{(k)}^1(\omega)}} \geq \tilde{\beta} (1 + |k|)^{-1} \|q_h\|_{L_1^2(\omega)}.$$

Proposition. On suppose que f_\star^k appartient à l'espace dual de $\mathbf{H}_{(k)\diamond}^1(\omega)$ et que g_\star^k est continue sur γ et vérifie $\gamma \cap \bar{\gamma}_0$

$$\begin{cases} g_{\star r}^k = g_{\star \theta}^k = 0 & \text{if } k = 0, \\ g_{\star r}^k + ik g_{\star \theta}^k = g_{\star z}^0 = 0 & \text{if } |k| = 1, \\ g_{\star r}^k = g_{\star \theta}^k = g_{\star z}^0 = 0 & \text{if } |k| \geq 2. \end{cases}$$

Alors le problème discret admet une solution unique (u_h^k, p_h^k) dans $\mathbf{H}_{h(k)} \times M_{h(k)}$.

Théorème. On suppose que la solution $(\mathbf{u}_\star^k, p_\star^k)$ correspondant aux données \mathbf{f}_\star^k et g_\star^k appartient à $H_1^{s+1}(\omega)^3 \times H^s(\omega)$, $\frac{1}{2} < s \leq 2$. On a l'estimation d'erreur a priori suivante

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\star^k - \mathbf{u}_h^k\|_{\mathbf{H}_{(k)}^1(\omega)} + (1 + |k|)^{-1} \|p_\star^k - p_h^k\|_{L_1^2(\omega)} \\ \leq c h^s \left((1 + |k|) \|\mathbf{u}_\star^k\|_{H_1^{s+1}(\omega)^3} + \|p_\star^k\|_{H_1^s(\omega)} \right). \end{aligned}$$

Pour des données régulières, la régularité de chaque solution $(\mathbf{u}_\star^k, p_\star^k)$ est explicitement connue en fonction de la géométrie de ω et peut dépendre de k . L'erreur est de l'ordre de ch^2 par exemple lorsque ω est un rectangle.

L'erreur tridimensionnelle

$$\mathbf{u}_{\mathcal{K}h}(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\mathcal{K}}^{\mathcal{K}} \mathbf{u}_h^k(r, z) e^{ik\theta}, \quad p_{\mathcal{K}h}(r, \theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\mathcal{K}}^{\mathcal{K}} p_h^k(r, z) e^{ik\theta}.$$

$(\mathcal{T}_{kh})_h$: famille régulière de triangulations associée à chaque k .

h_k : maximum des diamètres des éléments de \mathcal{T}_{kh} .

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}h}\|_{H^1(\Omega)^3} \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \mathcal{K}^{-\sigma} + \left(\sum_{k=-\mathcal{K}}^{\mathcal{K}} c(\mathbf{u}_*^k, p_*^k)^2 h_k^{2s_k} (1 + |k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\|p - p_{\mathcal{K}h}\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \mathcal{K}^{-\sigma} + \left(\sum_{k=-\mathcal{K}}^{\mathcal{K}} c(\mathbf{u}_*^k, p_*^k)^2 h_k^{2s_k} (1 + |k|)^4 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$0 < s_k \leq 2.$$

Analyse a posteriori de la discrétisation

La principale idée pour l'adaptativité consiste à utiliser différentes familles de triangulations $(\mathcal{T}_{kh})_h$, une pour chaque k .

Les arguments sont exactement les mêmes que dans le cas cartésien mais font maintenant appel à des inégalités inverses à poids et à l'opérateur de Clément à poids.

Pour $-\mathcal{K} \leq k \leq \mathcal{K}$ et pour tout K dans \mathcal{T}_{kh} , l'indicateur d'erreur η_K^k est défini par

$$\eta_K^k = h_K \|\mathbf{f}_h^k + \nu \Delta_k \mathbf{u}_h^k - \text{grad}_k p_h^k\|_{L_1^2(K)^3} + \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \|\nu \partial_n \mathbf{u}_h^k - p_h^k \mathbf{n}\|_{L_1^2(e)^3} + \|\text{div}_k \mathbf{u}_h^k\|_{L_1^2(K)}.$$

\mathbf{f}_h^k : approximation de \mathbf{f}_*^k constante (ou affine) par morceaux.

\mathcal{E}_K : ensemble des côtés de K qui ne sont pas contenus dans $\partial\omega$.

$[\cdot]_e$: saut à travers un élément e de \mathcal{E}_K .

$\|\cdot\|_{\mathbf{T}_{(k)}(\gamma)}$: norme de trace de $\mathbf{H}_{(k)}^1(\Omega)$ sur γ .

Théorème. On a l'estimation d'erreur a posteriori suivante

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_\star^k - \mathbf{u}_h^k\|_{\mathbf{H}_{(k)}^1(\omega)} + \|p_\star^k - p_h^k\|_{L_1^2(\omega)} \\ & \leq c \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{kh}} \left((\eta_K^k)^2 + h_K^2 \|\mathbf{f}_\star^k - \mathbf{f}_h^k\|_{L_1^2(K)}^2 \right) + \|\mathbf{g}_\star^k - i_h^\gamma \mathbf{g}_\star^k\|_{\mathbf{T}_{(k)}(\gamma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

ω_K : union des triangles de \mathcal{T}_{kh} qui partagent au moins un côté avec K .

Théorème. La majoration d'erreur suivante est vérifiée pour chaque indicateur η_K^k , $K \in \mathcal{T}_{kh}$,

$$\begin{aligned} \eta_K^k \leq c(1 + |k|) & \left(\|\mathbf{u}_\star^k - \mathbf{u}_h^k\|_{\mathbf{H}_{(k)}^1(\omega_K)} + \|p_\star^k - p_h^k\|_{L_1^2(\omega_K)} \right. \\ & \left. + h_K \|\mathbf{f}_\star^k - \mathbf{f}_h^k\|_{L_1^2(\omega_K)} + \|\mathbf{g}_\star^k - i_h^\gamma \mathbf{g}_\star^k\|_{\mathbf{T}_{(k)}(\gamma)} \right). \end{aligned}$$

L'erreur tridimensionnelle

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}h} \|_{H^1(\Omega)^3} + \| p - p_{\mathcal{K}h} \|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq c \left(\sum_{k=-\mathcal{K}}^{\mathcal{K}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_{kh}} \left((\eta_K^k)^2 + h_K^2 \| \mathbf{f}_*^k - \mathbf{f}_h^k \|_{L_1^2(K)}^2 \right) + \| \mathbf{g}_*^k - i_h^\gamma \mathbf{g}_*^k \|_{\mathbf{T}_{(k)}(\gamma)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + c' \left(\| \mathbf{f} - \mathbf{f}_{\mathcal{K}^*} \|_{H^{-1}(\Omega)^3} + \| \mathbf{g} - \mathbf{g}_{\mathcal{K}^*} \|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3} \right). \end{aligned}$$

Une stratégie d'adaptativité

- On choisit \mathcal{K} tel que $\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_{\mathcal{K}\star}\|_{H^{-1}(\Omega)^3}$ et $\|\mathbf{g} - \mathbf{g}_{\mathcal{K}\star}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3}$ soient inférieurs à une tolérance donnée η^* .
- On fixe une première triangulation grossière \mathcal{T}_h^* et, pour chaque k , $|k| \leq \mathcal{K}$, on la raffine pour obtenir une triangulation \mathcal{T}_{kh}^* telle que les quantités $\|\mathbf{f}_\star^k - \mathbf{f}_h^k\|_{L_1^2(\omega)}$ et $\|\mathbf{g}_\star^k - i_h^\gamma \mathbf{g}_\star^k\|_{\mathbf{T}_{(k)}(\gamma)}$ soient inférieures à η^* .
- Pour chaque k , on raffine la triangulation \mathcal{T}_{kh}^* de façon itérative, suivant les critères standard reposant sur les différentes valeurs des η_K^k jusqu'à obtenir le maillage final \mathcal{T}_{kh} .
- On réinterpole chaque $(\mathbf{u}_h^k e^{ik\theta}, p_h^k e^{ik\theta})$ sur une triangulation tridimensionnelle dans le but de jeter un coup d'œil à la solution discrète tridimensionnelle $(\mathbf{u}_{\mathcal{K}h}, p_{\mathcal{K}h})$.

Extension aux équations de Navier–Stokes

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \text{grad } p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Pour toute donnée (\mathbf{f}, \mathbf{g}) dans $H^{-1}(\Omega)^3 \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3$ vérifiant sur chaque composante connexe Γ_i de $\partial\Omega$

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, d\tau = 0, \quad 0 \leq i \leq I,$$

ce problème admet une solution **(pas forcément unique)** (\mathbf{u}, p) dans $H^1(\Omega)^3 \times L_0^2(\Omega)$.

Le couple (\mathbf{u}, p) est solution des équations de Navier–Stokes si et seulement si les couples (\mathbf{u}^k, p^k) , $k \in \mathbb{Z}$, sont solutions des systèmes bidimensionnels couplés

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta_k \mathbf{u}^k + C_k(\mathbf{u}^\ell) + \text{grad } p^k = \mathbf{f}^k & \text{dans } \omega, \\ \text{div}_k \mathbf{u}^k = 0 & \text{dans } \omega, \\ \mathbf{u}^k = \mathbf{g}^k & \text{sur } \gamma. \end{array} \right.$$

$$C_k(\mathbf{u}^\ell) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left((u_r^{k-\ell} \partial_r \mathbf{u}^\ell + u_z^{k-\ell} \partial_z \mathbf{u}^\ell) + \begin{pmatrix} \frac{1}{r} u_\theta^{k-\ell} ((i\ell u_r^\ell - u_\theta^\ell)) \\ \frac{1}{r} u_\theta^{k-\ell} (u_r^\ell + i\ell u_\theta^\ell) \\ \frac{1}{r} u_\theta^{k-\ell} \quad i\ell u_z^\ell \end{pmatrix} \right).$$

La troncature en Fourier induit une troncature supplémentaire du terme non linéaire.

F. Brezzi, J. Rappaz, P.-A. Raviart
J. Pousin, J. Rappaz

Soit (u, p) une solution des équations de Navier–Stokes telle que les équations de Navier–Stokes linéarisées en (u, p) soient un problème bien posé.

- Il existe un \mathcal{K}_0 , un h_0 et un voisinage \mathcal{U}^k de chaque (u^k, p^k) tels que, pour $\mathcal{K} \geq \mathcal{K}_0$ et $h \leq h_0$, le problème discret non linéaire admette une unique solution (u_h^k, p_h^k) dans \mathcal{U}^k .
- On a les mêmes estimations d'erreur a priori que dans le cas linéaire.
- On a les mêmes estimations d'erreur a posteriori que dans le cas linéaire.

Un problème ouvert : le choix d'un algorithme efficace pour résoudre le problème non linéaire.

References

- [1] Y. Achdou, C. Bernardi, F. Coquel — A priori and a posteriori analysis of finite volume discretizations of Darcy's equations, *Numer. Math.* **96** (2003), 17–42.
- [2] M. Amara, C. Bernardi, V. Girault, F. Hecht — Regularized finite element discretizations of a grade-two fluid model, à paraître dans *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*.
- [3] Z. Belhachmi, C. Bernardi, S. Deparis, F. Hecht — A truncated Fourier/finite element discretization of the Stokes equations in an axisymmetric domain, à paraître dans *Math. Models and Methods in Applied Sciences* **16** (2006).
- [4] A. Bergam, C. Bernardi, Z. Mghazli — A posteriori analysis of the finite element discretization of a nonlinear parabolic equation, *Math. Comput.* **74** (2005), 1117–1138.
- [5] C. Bernardi, M. Dauge, Y. Maday plus M. Azaïez — 'Spectral Methods for Axisymmetric Domains, Series in Applied Mathematics 3, Gauthier-Villars et North-Holland (1999).
- [6] C. Bernardi, V. Girault, F. Hecht — A posteriori analysis of a penalty method and application to the Stokes problem, *Math. Models and Methods in Applied Sciences* **13** (2003), 1599–1628.

- [7] C. Bernardi, V. Girault, F. Hecht — Choix du paramètre de pénalisation pour la discrétisation par éléments finis des équations de Navier–Stokes, *C.R. Acad. Sci. Paris* **336** série I (2003), 671–676.
- [8] C. Bernardi, B. Métivet, R. Verfürth — Analyse numérique d’indicateurs d’erreur, dans *Maillage et adaptation*, édité par P.-L. George, Hermès (2001), 251–278.
- [9] C. Bernardi, E. Süli — Time and space adaptivity for the second–order wave equation, *Math. Models and Methods in Applied Sciences* (2005), 199–225.
- [10] C. Bernardi, R. Verfürth — ‘A posteriori error analysis of the fully discretized time-dependent Stokes equations, *Modél. Math. et Anal. Numér.* **38** (2004), 437–455.
- [11] M. Braack, A. Ern — A posteriori control of modeling errors and discretization errors, *SIAM J. Multiscale Modeling and Simulation* **1** (2003), 221–238.
- [12] M. Dauge, E. Faou — in preparation.
- [13] J. Pousin, J. Rappaz — Consistency, stability, a priori and a posteriori errors for Petrov–Galerkin methods applied to nonlinear problems, *Numer. Math.* **69** (1994), 213–231.
- [14] R. Verfürth — *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*, Wiley and Teubner Mathematics (1996).