

Schéma équilibre pour les écoulements compressibles en présence de gravité à tout régime de Mach

Thomas PADIOLEAU, CEA Saclay

On s'intéresse ici à la simulation des phénomènes convectifs dans un milieu stratifié que l'on retrouve par exemple dans les intérieurs d'étoile ou encore dans les exoplanètes géantes. Ces phénomènes sont étudiés via l'approximation des équations d'Euler en présence de gravité, à savoir

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p(\rho, e) \mathbf{I}_3) &= \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbb{S} \\ \partial_t (\rho E) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot ((\rho E + p(\rho, e)) \mathbf{u}) &= \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbb{S} \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \\ \rho E &= \rho e + \frac{1}{2} \rho \|\mathbf{u}\|^2\end{aligned}\tag{1}$$

Dans notre cas, la discrétisation de la partie hyperbolique du système (1) avec gravité occasionne plusieurs difficultés liées à la stabilité et la précision des méthodes numériques :

- l'équilibre hydrostatique doit être correctement capturé au niveau discret. Malheureusement, la prise en compte du terme source de gravité par des méthodes simples (discrétisation centrée ou pas fractionnaires) ne permet pas de capturer fidèlement le régime stationnaire qui traduit l'équilibre entre le terme de gravité et les flux à moins d'utiliser une très grande résolution spatiale inenvisageable en pratique ;
- les schémas numériques colocalisés de type Godunov peuvent perdre leur précision dans le régime bas Mach sur des maillages pour lesquels la résolution n'est pas suffisante [1]

Afin de résoudre ces différents problèmes nous présentons un solveur adapté à ces écoulements qualifié de tout régime [2]. Il s'agit un schéma de type volumes finis basé sur un splitting d'opérateur acoustique-advection, inspiré des méthodes de type Lagrange-projection. L'étape acoustique peut être traitée implicitement permettant ainsi d'évacuer la vitesse du son de la condition de stabilité. Une correction des flux permet de supprimer la dépendance de l'erreur en le nombre de Mach. Enfin, la gravité est discrétisée à partir d'un schéma équilibre (well-balanced scheme) [3, 4], permettant de retrouver au niveau discret la notion d'équilibre, à précision machine près [5]. Enfin nous présentons les résultats obtenus avec le schéma explicite pour des simulations de convection dans les cas faiblement et fortement stratifiés [6].

Références

- [1] ON THE BEHAVIOR OF UPWIND SCHEMES IN THE LOW MACH LIMIT *Guillard, H. and Viozat, C.*, Comp. & Fluid, 1999
- [2] AN ALL-REGIME LAGRANGE-PROJECTION LIKE SCHEME FOR THE GAS DYNAMICS EQUATIONS ON UNSTRUCTURED MESHES *Chalons, C. and Girardin, M. and Kokh, S.*, Comm. in Comp. Phys., 2016
- [3] GREENBERG, J. M. AND LEROUX, A. Y., *A Well-Balanced Scheme for the Numerical Processing of Source Terms in Hyperbolic Equations*, SIAM J. on Num. Anal., 1996
- [4] GOSSE, L. *Computing qualitatively correct approximations of balance laws. Exponential-fit, well-balanced and asymptotic-preserving*. Springer, 2013
- [5] CHALONS, C. AND KESTENER, P. AND KOKH, S. AND STAUFFERT, M., *A large time-step and well-balanced Lagrange-projection type scheme for the shallow water equations*, Communications in Mathematical Sciences, 2017.
- [6] HURLBURT, N. E. AND TOOMRE, J. AND MASSAGUER, J. M., *Two-dimensional compressible convection extending over multiple scale heights*, The Astrophysical Journal, 1984.

Thomas PADIOLEAU, Maison de la Simulation USR 3441, Digiteo Labs, CEA Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

thomas.padioleau@cea.fr