# Taux de convergente d'un schéma asymptotic preserving pour la limite diffusive du $p$-système avec friction

**<u>Solène BULTEAU</u>**, Université de Nantes, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray

Dans cet exposé, nous présenterons un résultat de convergence numérique rigoureux pour une discrétisation du $p$-système. Ce problème, aussi appelé dynamique des gaz isentropiques en formulation lagrangienne est posé ci-dessous :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = -\sigma u, \end{cases} \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

où $\tau > 0$ désigne le volume spécifique du gaz, $u$ sa vitesse et $\sigma$ est le paramètre de friction. De plus $p$ désigne la pression, fonction dépendante de $\tau$ dont la dérivée est strictement négative.
Afin de simuler le temps long et la friction dominante, nous avons procédé à une mise à l'échelle de (1) à l'aide d'un petit paramètre $\varepsilon$ comme suit :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \varepsilon^2 \partial_t u + \partial_x p(\tau) = -\sigma u, \end{cases} \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

En faisant tendre $\varepsilon$ vers zero nous obtenons l'equation de la limite diffusive :

$$\partial_t \tau + \frac{1}{\sigma} \partial_{xx} p(\tau) = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

problème parabolique connu sous le nom d'équation des milieux poreux ou loi de Darcy.
Récemment, Lattanzio et Tzavaras [2] ont rigoureusement montré la convergence des solutions du problème hyperbolique (2) vers celles du problème parabolique (3) et ont exhibé le taux de convergence explicite. Pour cela ils ont utilisé des méthodes dites d'entropie relative.
Plus récemment, Berthon *et al* [3] se sont placés dans le cadre semi-discret en discrétisant les solutions en espace. En adaptant les techniques d'entropie relative, ils ont prouvé la convergence et, de plus, ont obtenu le même taux de convergence.
Dans cette présentation, nous discuterons du cas full-discret, où les discrétisations sont faites en temps et en espace à l'aide d'un schéma volumes finis asymptotic preserving introduit par Jin *et al* dans [1]. Dans le regime où $\varepsilon$ tend vers zero nous obtenons une discrétisation de la limite diffusive (3). Après avoir expliqué comment les méthodes d'entropie relative ont été adaptées à ce cas discret, nous présenterons les résultats de convergence asymptotique. De plus, nous verrons que le taux de convergence correspond à celui obtenu par Lattanzio et Tzavaras.

### Références


[1] S.Jin, L.Pareschi, G.Toscani, *Diffusive relaxation schemes for multiscale discrete-velocity kinetic equations*, SIAM J. Numer. Anal., 1998.

[2] C.Lattanzio, A.E.Tzavaras, *Relative entropy in diffusive relaxation*, SIAM J. Math. Anal., 2013.

[3] C.Berthon, M.Bessemoulin-Chatard, H.Mathis, *Numerical convergence rate for a diffusive limit of hyperbolic systems: p-system with damping*, SMAI J. Comput. Math., 2016.



**Solène BULTEAU**, Université de Nantes, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, CNRS UMR 6629 - 2 rue de la Houssinière
`solene.bulteau@univ-nantes.fr`
**Christophe BERTHON**, Université de Nantes, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, CNRS UMR 6629 - 2 rue de la Houssinière
`christophe.berthon@univ-nantes.fr`
**Marianne BESSEMOULIN-CHATARD**, Université de Nantes, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, CNRS UMR 6629 - 2 rue de la Houssinière
`marianne.bessemoulin@univ-nantes.fr`