

Variation et amélioration numérique 3D modélisant des problèmes d'écoulement dans des milieux naturels ou artificiels

QUEMAR Pierrick, EDF R&D, Université Paris 13

Mots-clés : équation de Navier–Stokes à surface libre, éléments finis, Telemac-3D, analyse numérique

Nous nous intéressons à la modélisation d'écoulements environnementaux avec les équations de Navier–Stokes incompressible à surface libre définies dans un domaine mobile Ω :

$$\begin{aligned}\rho\partial_t\mathbf{u} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= F & \forall(x, y, z) \in \Omega, t \in [0, T], \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \forall(x, y, z) \in \Omega, t \in [0, T].\end{aligned}$$

où \mathbf{u} représente le vecteur vitesse du fluide, p la pression totale, μ la viscosité dynamique, ρ la densité et F les termes sources. L'équation de surface libre associée sur l'inconnue η est :

$$\partial_t\eta + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s = 0 \quad \forall(x, y) \text{ on } \Gamma_s,$$

avec \mathbf{n}_s le vecteur normal à la surface libre.

L'étude de ces types d'écoulements présentant un intérêt majeur pour l'industrie, EDF R&D a développé un code d'hydrodynamique en 3 dimensions structuré sur la verticale : Telemac-3d [1]. Celui-ci s'appuie sur la résolution des équations de Navier–Stokes non hydrostatique à surface libre par la méthode de discrétisation spatiale des éléments finis (P1 sur la vitesse / P1 sur la pression). Il est à noter que la pression est considérée comme étant la somme d'un terme de pression hydrostatique et non hydrostatique. Par ailleurs, la méthode de Chorin–Temam [2] [3] est appliquée à ces équations. Ainsi, dans un premier temps, un champ de vitesse temporaire et la surface libre sont calculés à l'aide d'une discrétisation temporelle de type θ -schéma. Ensuite, une équation de Poisson est résolue sur le terme de pression non hydrostatique suivie du calcul du champ de vitesse final à divergence nulle.

Ainsi, nous proposons une analyse du code Telemac-3d et de l'ensemble des options de résolutions numériques disponibles, ainsi que de ces limitations. De plus, nous discutons des choix numériques pour la résolution des équations de Navier–Stokes à surface libre tels que le choix des bases éléments finis, des méthodes d'approximation, de la décomposition en pas fractionnaire et de et leurs influence.

Références

- [1] HERVOUET J.-M., *Hydrodynamics of free surface flows, modelling with the finite element method*, Wiley & sons, 2007.
- [2] CHORIN, *Numerical solution of the Navier–Stokes equations*, Mathematics of computation, 1968.
- [3] TEMAM, *Navier–Stokes equations*, North Holland, 1977.