Existence des ondes progressives pour l'équation de Gross–Pitaevskii non locale en dimension un

Pierre Mennuni, Université Lille 1

On considère l'équation de Gross–Pitaevskii non locale en dimension un

$$i\partial_t u = \Delta u + u\left(W * (1 - |u|^2)\right), \text{ dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tag{GPN}$$

où u est une fonction à valeurs complexes et W est une distribution tempérée. Dans le cadre du phénomène de condensat de Bose–Einstein, u représente une fonction d'onde tandis que W représente le potentiel d'interaction entre les bosons.
Dans le cas où W est une distribution paire, (GPN) est une équation hamiltonienne et son énergie, donnée par l'expression

$$E(u(t)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u'(t)|^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} (W * (1 - |u(t)|^2))(1 - |u(t)|^2) dx, \tag{1}$$

est formellement conservée. Si l'on s'intéresse à des solutions d'énergie finie, il est alors naturel d'imposer à $|u|$ de tendre vers 1 en un certain sens lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$. On considèrera le problème de Cauchy pour (GPN) avec une donnée initiale $u(0) = u_0$ vérifiant $|u_0(x)| \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Rappelons aussi la notion de moment physique

$$P(u) = \int_{\mathbb{R}} \langle iu', u \rangle dx, \tag{2}$$

qui comme l'énergie, est une quantité formellement conservée.

On s'intéresse ici aux solutions particulières appelées ondes progressives. Une onde progressive de vitesse $c \in \mathbb{R}$ est une solution de (GPN) de la forme

$$u_c(t, x) = v(x - ct).$$

Ainsi, v vérifie l'équation

$$icv' + \Delta v + v\left(W * (1 - |v|^2)\right) = 0 \text{ dans } \mathbb{R} \tag{OPNc}$$

et par conjugaison complexe, on peut se restreindre au cas $c \geq 0$. Notons que toute fonction complexe constante de module un est solution de (OPNc) et ces fonctions seront appelées solutions triviales. Dans le cas $W = \delta$, l'expression explicite les ondes progressives non triviales d'énergie finie est connue (voir [1]).

Le but de nos travaux est de présenter une méthode de minimisation de l'énergie, sous contrainte du moment, permettant de démontrer l'existence d'ondes progressives non triviales d'énergie finie pour (OPNc) et leurs propriétés et stabilité sous certaines conditions et hypothèses sur la distribution W. On présentera en parallèle une méthode numérique basée sur l'algorithme du gradient avec projection permettant d'obtenir numériquement les ondes progressives ainsi que les courbes d' énergie en fonction du moment.

Références

[1] Béthuel F., Gravejat P., Saut J-C., *Existence and properties of travelling waves for the Gross-Pitaevskii equation*, Stationary and time dependent Gross–Pitaevskii equations, 473, American Mathematical Society, pp.55-104, 2008, Contemporary Mathematics, 978-0-8218-4357.

[2] DE LAIRE A., *Global well-posedness for a nonlocal Gross-Pitaevskii equation with non-zero condition at infinity*, Communications in Partial Differential Equations. 35(11):2021-2058, 2010.

Pierre Mennuni, Université Lille 1, CNRS, UMR 8524-Laboratoire Paul Painlev. F-59000 Lille, France.
`pierre.mennuni@ed.univ-lille1.fr, pierremennuni@gmail.com`