Méthode de décomposition de domaine pour la résolution numérique d'une équation différentielle non linéaire

Nahed NACEUR, Université de Lorraine

L'objectif de cette communication est de présenter une méthode numérique alliant l'algorithme de Newton et la décomposition des domaines pour calculer une approximation de la solution positive d'une équation non linéaire du type suivant:

$$(E,\alpha):\begin{cases} \alpha u(x) - u''(x) + G(x,u'(x)) & = F(x,u(x)) + f(x) \quad \forall\, x\ \in \Omega \\ u(x) & = 0 \quad \forall\, x\ \in \partial\Omega. \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}$, α est un réel non négatif. Les non-linéarités G et$F$ sont des fonctions de Carathédory non négatives. On est particulièrement intéressé par des non-linéarités du type $\mid u(x) \mid^p$, $p > 1$ et $\mid u'(x) \mid^q$, $q > 1$. La fonction source f est non négative, intégrable, et plus généralement, une mesure non négative sur Ω.

Plusieurs auteurs ont prouvé l'existence des solutions dans le cas où f est régulière. Dans [2] , les auteurs ont analysé le cas où $\alpha = 0$ et f une donnée mesure, ils ont prouvé l'existence d'une solution positive et calculé une approximation numérique.

Le présent travail est dédié au cas où $\alpha \geq 0$. Pour commencer, on démontre l'existence d'une solution positive. Ensuite en se fondant sur la même méthodologie utilisée pour établir l'existence de la solution positive, on développe une méthode numérique. Le premier pas de l'algorithme consiste en calculer une sur solution $\overline{w}$ de (E,α), c'est à dire, une solution du système non linéaire suivant:

$$(E1):\begin{cases} \alpha\overline{w}(x) - \overline{w}''(x) & = F(x,\overline{w}(x)) + f(x) \quad \forall\, x\ \in \Omega \\ \overline{w}(x) & = 0 \quad \forall\, x\ \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour linéariser le problème $(E1)$ on applique la méthode de Newton. A chaque itération de cette méthode, on résout une équation linéaire qui n'est pas toujours elliptique puisqu'on ne peut pas contrôler le signe de $F'(\overline{w})$. Cette difficulté peut être dépassée grâce à la méthode de décomposition de domaines,[1]. Cette méthode garantit la coercivité du problème linéarisé sur chaque sous domaine, dont la taille dépend de la valeur de α et de la norme $\|F'(\overline{w})\|_\infty$. On démontre que chaque itération de Newton est bien posée et que l'algorithme converge pour une classe de non linéarités comprenant celles qui nous intéressent.

Puis, on construit une suite $\{u_n\}_n$ en $H^1_0(\Omega)$, où $u_0 = \overline{w}$ et à chaque itération u_n est la solution de:

$$\begin{cases} \alpha u_{n+1}(x) - u''_{n+1}(x) + G_{n+1}(x,u'_{n+1}(x)) & = F(x,u_n(x)) + f(x) \quad \forall\, x\ \in \Omega \\ u_{n+1}(x) & = 0 \quad \forall\, x\ \in \partial\Omega. \end{cases}$$

où G_n est l'approximation Yosida de G, [2]. On montre la convergence de l'algorithme pour une classe de non linéarités comprenant celles que nous intéressent.

L'objectif final de ce travail est de résoudre des problèmes paraboliques non-linéaires où à chaque pas de temps on retrouve un problème elliptique de type (E,α), tout en contrôlant le pas de temps et espace quand la norme $\|F'(\overline{w})\|_\infty$ augmente.

La discrétisation est réalisée par la méthode des éléments finis. On présente une série d'exemples numériques montrant les performances de l'algorithme étudié.

Références

[1] A.Quarteroni, A.Valli, *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations* , Oxford Science Publications, 1999.

[2] N.Alaa, J.R.Roche, *Theorical and numerical analysis of a class of nonlinear elliptic equations*, Mediterranean Journal of Mathematics, Vol. 2, No. 3, pages 327 - 344, 2005.

Nahed NACEUR, Université de Lorraine, IECL, B.P. 70239, 54506 Vandoeuvre lès Nancy Cedex.
nahed.naceur@univ-lorraine.fr