Problèmes de contrôle liés aux mouvements de foules

Michel DUPREZ, Institut de Mathématiques de Marseille

Morgan MORANCEY, Institut de Mathématiques de Marseille

Francesco ROSSI, Dipartimento di Matematica di Padova

Pour décrire l'évolution d'une foule d'agents, deux approches sont largement utilisées. Dans les modèles microscopiques, la position de chaque agent est clairement identifiée ; la dynamique de la foule est décrite par une équation différentielle ordinaire de grande dimension, dans laquelle des termes de couplages représentent des interactions entre les agents. Dans les modèles macroscopiques, l'idée est de représenter la foule par la densité spatiale des agents ; dans ce cadre, l'évolution de la densité est solution d'une équation aux dérivées partielles, généralement de type transport. Des termes non-locaux (tels que des convolutions) modélisent les interactions entre les agents.

Dans cet exposé, nous étudierons un modèle macroscopique. Ainsi la foule sera représentée par une mesure $\mu(t)$ définie pour tout temps t positif sur l'espace $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$). Le champ de vitesses naturel (non-contrôlé) de la mesure, notée $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, sera un champ de vecteur supposé Lipschitz et uniformément borné. Nous agirons sur le champ de vitesses dans une portion fixée ω de l'espace, qui sera un ouvert connexe et non-vide de $\mathbb{R}^d$. Les contrôles admissibles seront alors des fonctions de la forme $\mathbb{1}_\omega u$: $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$. Nous considérons donc l'équation de transport linéaire suivante

$$\begin{cases} \partial_t \mu + \nabla \cdot ((v + \mathbb{1}_\omega u)\mu) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \\ \mu(0) = \mu^0 & \text{dans } \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{1}$$

où μ^0 est la donnée initiale (configuration initiale de la foule) et la fonction u un contrôle admissible. La fonction $v + \mathbb{1}_\omega u$ représente le champ de vecteur agissant sur μ. Le système (1) est une première approximation de la modélisation d'une foule puisque le champ de vecteur non-contrôlé est donné et ne décrit pas d'interaction entre les agents. Néanmoins, il est nécessaire de comprendre les propriétés de contrôlabilité d'une telle équation simplifiée dans un premier temps avant d'étudier le cas d'un champ de vitesses dépendant de la foule. Bien que le système (1) soit linéaire, le contrôle agit sur la vitesse, ainsi le problème de contrôle, lui, est non-linéaire, ce qui est la difficulté principale de cette étude.

Nous mettons en évidence dans [1] qu'il est possible de guider une foule proche d'une configuration finale donnée à l'aide d'un contrôle Lipschitz lorsque la dynamique non-contrôlée v permet de croiser la région de contrôle. Nous montrons que la contrôlabilité exacte peut avoir lieu seulement pour des contrôles avec moins de régularité pour lesquels nous pouvons perdre l'unicité de la solution associée. Nous donnons également une caractérisation du temps minimal dans [2]. Le temps minimal pour guider une foule vers une configuration finale est lié à la condition d'avoir suffisamment de masse dans la région de contrôle afin d'alimenter la configuration finale désirée. La construction du contrôle étant un passage à la limite du cas discret, nous en déduisons un algorithme numérique convergeant. Nous finirons par quelques simulations numériques.

Références

[1] M. Duprez, M. Morancey, F. Rossi, *Approximate and exact controllability of the continuity equation with a localized vector field*, soumis, 2017.

[2] M. Duprez, M. Morancey, F. Rossi, *Minimal time problem for crowd models with a localized vector field*, soumis, 2018.

Michel DUPREZ, Institut de Mathématiques de Marseille, 39, rue F. Joliot Curie, 13 013 Marseille
mduprez@math.cnrs.fr
Morgan MORANCEY, Institut de Mathématiques de Marseille, 39, rue F. Joliot Curie, 13 013 Marseille
morgan.morancey@univ-amu.fr
Francesco ROSSI, Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita", Via Trieste 63, 35131 Padova, Italy
francesco.rossi@math.unipd.it