

Méthode DDFV pour le problème de Navier-Stokes avec des conditions aux bords ouvertes

Thierry GOUDON, Université Côte d'Azur, LJAD

Stella KRELL, Université Côte d'Azur, LJAD

Giulia LISSONI, Université Côte d'Azur, LJAD

Nous nous sommes intéressés au problème du calcul d'un fluide autour d'un objet. Dans ce cadre, il est souvent nécessaire de tronquer le domaine physique, soit parce qu'on veut économiser le coût de calcul, soit parce que le domaine physique est non borné. À cause de cela, des conditions artificielles sur la partie non physique du bord (qu'on va appeler Γ) ont été introduites dans [1] et étudiées dans [2]. Nous proposons de présenter des résultats sur l'approximation par des méthodes DDFV (Discrete Duality Finite Volume) du problème de Navier-Stokes incompressible avec ce type de conditions en sortie. L'avantage des schémas DDFV, qui ont été introduits dans [4] et étudiés dans [3], est de pouvoir travailler sur des maillages très généraux, ne vérifiant pas nécessairement la condition d'orthogonalité classique des maillages volumes finis. Sur ces maillages, les inconnues sont décalées : la vitesse $\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ est approchée simultanément aux centres et aux sommets des mailles du maillage initial, et la pression $p^{\mathcal{D}}$ sur les arêtes du maillage initial. La condition au bord à laquelle on s'intéresse est la suivante :

$$\sigma(\mathbf{u}, p) \cdot \vec{\mathbf{n}} = -\frac{1}{2}(\mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}})^-(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{ref}) + \sigma_{ref} \cdot \vec{\mathbf{n}}, \quad \text{sur } \Gamma \quad (1)$$

où $\sigma(\mathbf{u}, p) = \frac{2}{\text{Re}} \text{Du} - p\text{Id}$ est le tenseur des contraintes et $(\mathbf{u}_{ref}, \sigma_{ref})$ décrivent le fluide de référence, qui est censé être une bonne approximation du fluide autour du bord ouvert. La condition (1) a été dérivée d'une formulation variationnelle particulière des équations de Navier-Stokes afin d'assurer une estimation d'énergie. On propose de recréer la même situation au niveau discret grâce au formalisme DDFV.

La nouveauté de ce travail réside dans l'approximation du terme de convection : on s'est inspiré de ce qui était fait dans [5] dans le cas de conditions aux bords de Dirichlet homogène. On a modifié la partie relative au bord en tenant compte du fait qu'on voulait préserver au niveau discret l'estimation d'énergie, pour laquelle il a fallu démontrer une inégalité de Korn discrète et un théorème de trace.

Le schéma qu'on obtient est bien posé et les conditions ouvertes discrètes qu'on impose permettent d'obtenir l'estimation d'énergie qu'on cherchait. Enfin, on a validé nos résultats théoriques par des simulations numériques en étudiant le cas test proposé dans [1].

Références

- [1] C.H BRUNEAU ET P. FABRIE, *Effective downstream boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equations*, International Journal for numerical methods in fluids, 1994.
- [2] C.H BRUNEAU ET P. FABRIE, *New efficient boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equations: a well-posedness result*, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 1996.
- [3] K. DOMELEVO ET P. OMNES, *A finite volume method for the Laplace equation on almost arbitrary two-dimensional grids*, M²AN, 39, n.6, pp. 1203-1249, 2005.
- [4] F. HERMELINE, *A finite volume method for the approximation of diffusion operators on distorted meshes*, J. Comput. Phys., 160(2) : 481-499, 2000.
- [5] S. KRELL, *Stabilized DDFV Schemes For The Incompressible Navier-Stokes Equations*, FVCA VI Problems and Perspectives. Springer Proceedings in Mathematics, vol 4, 2011.

Giulia LISSONI, Université Côte d'Azur, Laboratoire de Mathématiques J.A. Dieudonné
Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02 France
lissoni@unice.fr

Stella KRELL, Université Côte d'Azur, Laboratoire de Mathématiques J.A. Dieudonné
Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02 France
krell@unice.fr

Thierry GOUDON, Université Côte d'Azur, Laboratoire de Mathématiques J.A. Dieudonné
Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02 France
goudon@unice.fr