

Analyse d'une équation de croissance-fragmentation structurée en taille et incrément de taille

Hugo MARTIN, Sorbonne Université

Gabriel PIERRE, Université Paris-Saclay

Marie DOUMIC, Sorbonne Université

Mots-clés : dynamique des populations, croissance de bactéries, éléments propres principaux, point fixe, entropie relative généralisée

La croissance de bactéries est modélisée avec succès depuis plusieurs décennies par les équations de populations structurées, cependant le mécanisme régissant le déclenchement de la division reste un sujet ouvert.

Dans [1] les traditionnels modèles en âge et taille sont comparés avec des méthodes de problème inverse. Peu après, un nouveau modèle, dit *incrémental* a été proposé dans [3] et [4] (voir [2] pour une revue de littérature). Dans ce modèle, la division est déclenchée par la quantité dont une bactérie a grandi depuis sa naissance, tandis que sa vitesse de croissance est gouvernée par sa taille actuelle. Cette description présente des propriétés qualitatives prometteuses et appelait donc à une analyse mathématique. En notant x la taille, a l'incrément, g la vitesse de croissance, B le taux de division et μ le noyau de fragmentation, le modèle est décrit par la système

$$\begin{cases} \partial n(t, a, x) + \partial(g(x)n(t, a, x)) + \partial(g(x)n(t, a, x)) + B(a)g(x)n(t, a, x) = 0, & t \geq 0, x > a > 0, \\ g(x)n(t, 0, x) = \int_0^1 g\left(\frac{x}{z}\right) \int_0^\infty B(a)n(t, a, \frac{x}{z}) da \frac{d\mu(z)}{z}, & t \geq 0, x > 0. \end{cases}$$

Nous nous intéressons au cas où la croissance est exponentielle. Sous des hypothèses assez générales sur la division, on d'abord prouve l'existence d'une unique fonction propre $N(a, x)$ dans une espace $L^1(\mathbb{R}_+^2, \omega(a, x) da dx)$ avec $\omega(a, x)$ un poids polynomial. Ensuite, en supposant l'existence d'une solution en temps $n(t, a, x)$ et avec une hypothèse classique supplémentaire liant n et $e^t N$, on exhibe une inégalité d'entropie.

Références

- [1] ROBERT, LYDIA AND HOFFMANN, MARC AND KRELL, NATHALIE AND AYMERICH, STÉPHANE AND ROBERT, JÉRÔME AND DOUMIC, MARIE, *Division in Escherichia coli triggered by a size-sensing rather than a timing mechanism*, BMC Biology, 12, 17, 2014.
- [2] JOHN T SAULS AND DONGYANG LI AND SUCKJOON JUN, *Adder and a coarse-grained approach to cell size homeostasis in bacteria*, Current Opinion in Cell Biology, 38, 38 - 44, 2016.
- [3] SATTAR TAHERI-ARAGHI AND SERENA BRADDE AND JOHN T. SAULS AND NORBERT S. HILL AND PETRA ANNE LEVIN AND JOHAN PAULSSON AND MASSIMO VERGASSOLA AND SUCKJOON JUN, *Cell-Size Control and Homeostasis in Bacteria*, Current Biology, 25, 385 - 391, 2015.
- [4] AMIR, ARIEL, *Cell size regulation in bacteria*, bioRxiv, 2014.

Hugo MARTIN, Sorbonne université, Laboratoire Jacques-Louis Lions, LJLL, F-75005 Paris
martin@ljl.math.upmc.fr

Gabriel PIERRE, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, UVSQ, CNRS, Université Paris-Saclay, 45 Avenue des États-Unis, 78035 Versailles
pierre.gabriel@uvsq.fr

Marie DOUMIC, ISorbonne université, INRIA, Laboratoire Jacques-Louis Lions, équipe MAMBA, F-75005 Paris
marie.doumic@inria.de