Analyse de sensibilité pour les équations d'Euler

Camilla FIORINI, LMV, UVSQ, Versailles.

Christophe CHALONS, LMV, UVSQ, Versailles.

Régis DUVIGNEAU, Université Côte d'Azur, INRIA, CNRS, Sophia-Antipolis.

L'analyse de sensibilité s'intéresse à l'étude des changements dans la solution d'un système d'équations aux dérivées partielles en fonction de la variation des paramètres d'entrée du modèle. L'analyse de sensibilité a plusieurs applications, y compris la quantification d'incertitude, l'évaluation rapide de solutions proches et l'optimisation basée sur des méthodes de descente. Les techniques standard d'analyse de sensibilité requièrent de dériver la variable d'état, donc elles ne fonctionnent que sous certaines conditions de régularité [1]. Cependant, ces hypothèses ne sont pas vérifiées dans le cas d'équations hyperboliques de la forme

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x), \end{cases}$$

à cause des discontinuités qui peuvent se produire même si la donnée initiale est régulière. Si l'état $\mathbf{U}$ est discontinu, des Diracs apparaissent dans la sensibilité $\mathbf{U}_a = \partial_a \mathbf{U}$, où a est le paramètre d'intérêt. Dans le cas régulier, les équations de sensibilité se déduisent en dérivant les équations d'état; cela donne les équations de sensibilité suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U}_a + \partial_x \mathbf{F}'(\mathbf{U})\mathbf{U}_a = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \mathbf{U}_a(x, 0) = \mathbf{U}_{a,0}(x). \end{cases}$$

Dans [4] nous avons analisé le problème dans les détails dans le cas du système d'Euler barotrope et nous avons proposé un terme de correction de la forme :

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^{N_s} \boldsymbol{\rho}_k \delta(x - x_{k,s}(t)),$$

où N_s est le nombre de discontinuités, $\boldsymbol{\rho}_k$ est l'amplitude de la $k-$ième correction (à calculer) et $x_{s,k}(t)$ la position de la $k-$ième discontinuité à l'instant t. Ensuite, nous avons étendu cela aux systèmes d'Euler complet et d'Euler quasi-1D. Pour le dernier, nous avons considéré un problème d'optimisation de type *pressure matching*, c'est-à-dire la minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$J(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}\|p - p^*\|_{L^2}^2,$$

où p est la pression et p^* la pression cible. Pour résoudre cela, nous avons utilisé une méthode du gradient. Pour cette méthode il est nécessaire de calculer le gradient de la fonctionnelle par rapport aux paramètres d'interêt:

$$\nabla_{\mathbf{a}} J = (p - p^*, p_{\mathbf{a}})_{L^2}.$$

Nous avons comparé les résultats obtenus en calculant le gradient avec les sensibilités $p_{\mathbf{a}}$ corrigées et non corrigées.

Références

[1] C. Bardos and O. Pironneau,*A formalism for the differentiation of conservation laws*, Compte rendu de l'Académie des Sciences, 335(10):839-845, 2002.

[2] C. Chalons and P. Goatin, *Godunov scheme and sampling technique for computing phase transitions in traffic flow modeling.*, Interfaces and Free Boundaries, 10(2):197-221, 2008.

[3] V. Guinot, *Upwind finite volume solution of sensitivity equations for hyperbolic systems of conservation laws with discontinuous solutions.*, Computers & Fluids, 38(9):1697-1709, 2009.

[4] C. Chalons, R. Duvigneau, C. Fiorini, Sensitivity analysis and numerical diffusion effects for hyperbolic PDE systems with discontinuous solutions. The case of barotropic Euler equations in Lagrangian coordinates, submitted, 2017.

Camilla FIORINI, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, UVSQ, CNRS, Université Paris-Saclay, 45, avenue des États-Unis, 78035 Versailles, France.
camilla.fiorini@uvsq.fr
Christophe CHALONS, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, UVSQ, CNRS, Université Paris-Saclay, 45, avenue des États-Unis, 78035 Versailles, France.
christophe.chalons@uvsq.fr
Régis DUVIGNEAU, Université Côte d'Azur, INRIA, CNRS, LJAD, INRIA Sophia-Antipolis Méditerranée Center, ACUMES Project-Team, 2004 route des Lucioles - B.P. 93, 06902 Sophia Antipolis, France.
regis.duvigneau@inria.fr