# Existence des solutions et approximation volumes finis pour certains systèmes de diffusion croisée

**Boris ANDREIANOV**, Institut Denis Poisson, Université de Tours

**Mostafa BENDAHMANE**, Institut de Mathématiques de Bordeaux

**Ricardo RUIZ BAIER**, Oxford Mathematical Institute, Royaume-Uni

L'exposé sera consacré principalement à la présentation des résultats du travail [1] où l'on s'intéresse aux systèmes du type "diffusion croisée" généralisant le système suivant, du type SKT (Shigesada-Kawasaki-Teramoto) : dans le domaine $Q_T := \Omega \times (0,T] \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} &\partial_t u - D_1 \Delta u - \operatorname{div}\big((u+v)\nabla u + v\nabla v\big) = u(a_1 - b_1 u - c_1 v),\\ &\partial_t v - D_2 \Delta v - \operatorname{div}\big(u\nabla u + (u+v)\nabla v\big) = v(a_2 - b_2 u - c_2 v), \qquad (x,t),\\ &\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0,\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \end{aligned} \tag{1}$$

où les coefficients $a_i, b_i, c_i$ sont positifs ($i = 1, 2$). La matrice de diffusion croisée associée est

$$\mathcal{A}(u,v) = \begin{pmatrix} u+v & u \\ v & u+v \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Dans cet exemple, la diffusion croisée est "faible" (en termes de [2]) dans le sens que la matrice est positive; toutefois, la diffusion reste non linéaire et le cadre hilbertien n'est pas approprié. L'étude consiste à combiner des techniques plutôt très classiques d'analyse non linéaire permettant de donner un sens à tous les termes de la formulation faible dans l'espace $L^1$, et de passer à la limite dans des suites des solutions approchées. Une possibilité pour produire des solutions approchées est d'utiliser un schéma volumes finis, très classique lui aussi (dans la lignée des schémas de [3] sur maillages admissibles). On montrera quelques simulations, de nombreuses cas test peuvent être trouvés dans les travaux postérieurs de Ricardo Ruiz Baier, Canrong Tian et al..
On évoquera aussi l'étude des systèmes du type étudié par Chen et Jüngel dans [2], notamment

$$\begin{aligned} \partial_t u - D_1 \Delta u - \operatorname{div}\big(c_1 u \nabla u + \nabla(uv)\big) &= F(u,v),\\ \partial_t v - D_2 \Delta v - \operatorname{div}\big(c_2 v \nabla v + \nabla(uv)\big) &= G(u,v) \end{aligned}$$

où la diffusion croisée peut être "forte" càd la matrice n'est pas positive dès que $c_1, c_2 > 0$ ne sont pas assez grands. La preuve d'existence passe alors par les estimations d'entropie qu'on obtient formellement en multipliant les équations par $\ln(u)$ et $\ln(v)$, respectivement (ayant $\nabla(uv) \cdot (\nabla \ln u + \nabla \ln v) = 4|\nabla\sqrt{uv}|^2$). On discutera de la compatibilité de cette technique d'estimation avec la construction des solutions approchées à l'aide des mêmes schémas volumes finis.

**Références**

[1] B. Andreianov, M. Bendahmane and R. Ruiz Baier, *Analysis of a finite volume method for a cross-diffusion model in population dynamics*, M3AS, Vol.21, No.2, pp.307-344 (2011).

[2] L. Chen and A. Jüngel, *Analysis of a multi-dimensional parabolic population model with strong cross-diffusion*, SIAM J. Math. Anal. Vol.36, pp.301–322 (2004).

[3] R. Eymard, T. Gallouët and R. Herbin, Finite Volume Methods. In: P.G. Ciarlet, J.L. Lions (eds.), Handbook of Numerical Analysis, vol. VII, North-Holland, Amsterdam, (2000) pp. 713-1020.

**Boris ANDREIANOV**, Institut Denis Poisson, Université de Tours, Parc Grandmont, 37200 Tours
`boris.andreianov@univ-tours.fr`
**Mostafa BENDAHMANE**,
`mostafa.bendahmane@math@u-bordeaux.fr`
**Ricardo RUIZ BAIER**,
`ruizbaier@maths.ox.ac.uk`