

Algorithmes de convolution-redistanciation pour le couplage fluide-structure en coordonnées eulériennes

Arnaud SENGERS, Université Grenoble Alpes

Nous nous intéressons à la simulation du déplacement de membranes élastiques immergées dans un fluide, avec pour application la dynamique des globules rouges dans le sang. Différentes méthodes permettent de gérer le couplage entre le fluide et le solide, représentés respectivement par une formulation eulérienne et lagrangienne. Nous considérons ici la méthode des lignes de niveaux où la membrane est représentée implicitement comme la ligne de niveau 0 d'une fonction auxiliaire. Un des principaux avantages de cette méthode est l'utilisation d'un maillage unique pour le fluide comme pour l'interface.

La stabilité des schémas de couplage représente un challenge important lors de la simulation de méthode de couplage fluide-structure. En effet, l'utilisation de schémas explicites est grandement limitée par une condition restrictive sur le pas de temps. Un schéma implicite, bien qu'inconditionnellement stable, nécessite la résolution d'un système constitué d'une équation de Navier-Stokes couplée à une équation de transport avec un terme source non linéaire, ce qui se révèle trop coûteux dans la pratique.

Un schéma semi-implicite a été proposé dans [1]. Il consiste à ajouter une étape de prédiction de la position de la membrane et utiliser celle-ci pour calculer les forces impliquant la courbure dans l'équation de Navier-Stokes. Il permet d'obtenir la stabilité inconditionnelle avec un coût algorithmique proche de celui d'un schéma explicite.

Cette étape de prédiction peut être rapprochée des méthodes de convolution-seuillage introduites initialement par Merriman-Bence-Osher [2]. Conceptuellement, cela consiste à alterner une étape de diffusion d'équation de la chaleur et une étape de seuillage. Le principal avantage de cette méthode est son inconditionnelle stabilité. Initialement utilisée pour simuler le mouvement par courbure moyenne, cette méthode a été étendue pour simuler d'autres flots géométriques et plus particulièrement le flot qui intervient dans le cas des globules rouges : le flot de Willmore [3].

Néanmoins, un défaut majeur des algorithmes de convolution-seuillage est que, sur maillage fixe, si la résolution est insuffisante, l'interface peut rester figée. Il faut alors recourir à un raffinement du maillage au niveau de l'interface, ce qui augmente fortement le coût algorithmique.

Une solution alternative à ce problème est de représenter l'interface comme la ligne de niveau 0 de la distance signée plutôt que via une fonction caractéristique [4]. Ainsi l'étape de seuillage, qui consiste désormais en une redistanciation, permet de mieux localiser l'interface numériquement. L'étape de redistanciation peut être réalisée efficacement avec par exemple une méthode de fast marching.

Nous avons ainsi à disposition une méthode efficace pour simuler le déplacement par flot de Willmore. En effet, on enchaîne deux résolutions d'équation de la chaleur et une redistanciation.

Pour respecter les contraintes de conservation de volume et de périmètre inhérentes au globules rouges, on ajoute une étape de correction avant la redistanciation qui consiste à déplacer légèrement l'interface en ne prenant pas la ligne de niveau 0 mais la ligne de niveau $\lambda + \mu\kappa$ (κ désignant la courbure moyenne). Les constantes λ, μ sont choisies pour récupérer le volume et périmètre initial. Le choix de cette correction est motivé par l'expression des premières variations du flot de Willmore avec multiplicateurs de Lagrange. Des simulations utilisant cette méthode ont été réalisées en dimension 2 et 3 pour obtenir la position d'équilibre d'une interface soumise au flot de Willmore.

Références

- [1] G.H COTTET ET E. MAITRE, *A semi-implicit level set method for multiphase flows and fluid-structure interaction problems*, Journal of Computational Physics, 2015.
- [2] B. MERRIMAN, J.K. BENCE ET S. OSHER, *Diffusion generated motion by mean curvature*, Revue, Department of Mathematics, University of California, Los Angeles, 1992.
- [3] S. ESEDOGLU, S. J. RUUTH ET R. TSAI, *Threshold dynamics for high order geometric motions. Interfaces and Free Boundaries*, 10(3), 263-282, 2007.
- [4] S. ESEDOGLU, S. J. RUUTH ET R. TSAI, *Diffusion generated motion using signed distance functions. Journal of Computational Physics*, 229(4), 1017-1042, 2010.

Arnaud SENGERS, LJK, Université Grenoble Alpes, 700 Avenue Centrale, 38000 Grenoble
arnaud.sengers@univ-grenoble-alpes.fr