Sur une équation de dispersion généralisée

Alexandre THOREL, Université du Havre

Mots-clés : semi-groupes analytiques, espaces d'interpolation, calcul fonctionnel.

On étudie un modèle stationnaire linéarisé de diffusion généralisée en dynamique de population modélisé par l'équation

$$\Delta^2 u - r\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega, \tag{1}$$

où $r \in \mathbb{R}^*$ et u est la densité de population. Dans ce modèle, obtenu dans [2, 4], le terme biharmonique représente la dispersion induite par les interactions à longue portée, alors que le laplacien ne traduit que la dispersion à courte portée. Dans ce travail, on suppose $f \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p < +\infty$ et Ω cylindrique, plus précisément : $\Omega :=]a,b[\times \omega$, où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert borné de classe C^2. On montre alors l'existence d'une unique solution $u \in W^{4,p}(\Omega)$ de (1) sous diverses conditions aux limites. Pour cela, on s'inspire des travaux de [3] basés sur la théorie des semi-groupes analytiques et des sommes d'opérateurs [1]. L'espace étant cylindrique, on procède à une séparation des variables en notant

$$u(x)(y) := u(x,y) \quad \text{et} \quad Au(x) := \Delta_y u(x) \quad \text{avec} \quad u(x) \in D(A),$$

pour p.p. $(x,y) \in \Omega$. Ici $D(A)$ est le domaine de A qui dépend des conditions aux bords considérées. L'équation (1) s'écrit alors en une équation différentielle opérationnelle du quatrième ordre :

$$u^{(4)}(x) + (2A - rI)u''(x) + (A^2 - rA)u(x) = f(x), \tag{2}$$

où $x \in]a,b[$. On se place alors dans l'espace de Banach $X = L^p(\omega)$ dans lequel on montre l'existence et l'unicité d'une solution

$$u \in W^{4,p}(a,b;X) \cap L^p\left(a,b;D(A^2)\right) \quad \text{avec} \quad u'' \in L^p(a,b;D(A)).$$

Plus précisément, pour chaque type de condition aux limites, on donne les conditions nécéssaires et suffisantes de compatibilité sur les données pour avoir l'existence, l'unicité et la régularité optimale d'une solution dans chacun des cas. Pour cela, on fera appel à des résultats d'interpolation.
Dans un deuxième temps, pour les mêmes conditions aux limites, on montrera, grâce aux mêmes méthodes que celles de [5], l'existence, l'unicité et la régularité optimale d'une solution dans le cas où $r = 0$. Puis, on généralisera l'équation (2) en considérant

$$u^{(4)}(x) + (P+Q)u''(x) + PQu(x) = f(x), \quad x \in]a,b[, \tag{3}$$

où P et Q sont des opérateurs linéaires sur X tels que $P = Q + B$ avec $B \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur borné remplaçant rI de l'équation (2). On montrera alors qu'il existe une unique solution de (3) telle que

$$u \in W^{4,p}(a,b;X) \cap L^p(a,b;D(PQ)) \quad \text{avec} \quad u'' \in L^p(a,b;D(P+Q)).$$

Références

[1] G. Dore & A. Venni, "On the Closedness of the Sum of Two Closed Operators", *Math. Z.*, 196, 1987, pp. 189-201.

[2] D.S. Cohen & J.D. Murray, "A Generalized Diffusion Model for Growth and Dispersal in Population", *Journal of Mathematical Biology*,12, Springer-Verlag, 1981, pp. 237-249.

[3] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe & A. Yagi, "A Simplified Approach in the Study of Elliptic Differential Equations in UMD Spaces and New Applications", *Funkcialaj Ekvacioj*, 51, 2008, pp. 165187.

[4] F.L. Ochoa, "A Generalized Reaction-Diffusion Model for spatial Structures Formed by Motile cells", *BioSystems*, 17, 1984, pp. 35-50.

[5] R. Labbas, S. Maingot, D. Manceau & A. Thorel, "On the regularity of a generalized diffusion problem arising in population dynamics set in a cylindrical domain", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 450, pp. 351-376, 2017.

Alexandre THOREL, LMAH, Université du Havre, 25 Rue Philippe Lebon
`alexandre.thorel@orange.fr`