

# Méthode de convexité avec poids-optimal pour les EDP hyperboliques et schémas de discrétisations numériques uniformes en temps et espace

Fatiha Alabau-Boussouira, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Sorbonne Université

On s'intéressera dans cet exposé, aux EDP d'évolution hyperboliques avec amortissement non linéaire. Cet amortissement n'est actif, en pratique, que "localement", c'est-à-dire soit dans un sous-domaine du domaine spatial dans lequel l'EDP est posée ou soit sur une partie de son bord. Le domaine d'action de l'amortissement doit satisfaire à des conditions géométriques bien connues, dues à la vitesse de propagation finie des EDP considérées. Les effets de l'amortissement se traduisent physiquement et mathématiquement par le fait qu'une énergie naturelle associée à l'EDP est décroissante au cours du temps, cette décroissance "se mesurant" sous forme d'une relation de dissipation de l'énergie.

Comment pouvoir prédire, sous une forme que l'on espère optimale, notamment en terme de taux de décroissance, et dans un cadre général, le comportement asymptotique des solutions en temps long ? Comment combiner taux optimal de décroissance et hypothèses optimales sur les conditions géométriques sur le domaine spatial dans lequel l'amortissement est actif ?

On présentera dans une première partie de l'exposé la méthode de convexité avec poids-optimal qui permet de répondre à ces questions, en insistant sur les différentes étapes de la construction de cette méthode et sur ce qu'elle permet de comprendre entre étapes géométriques et étapes analysant de façon optimale la présence de l'amortissement non linéaire. Nous donnerons plusieurs taux explicites de décroissance en fonction de la non linéarité de l'amortissement. Un des aspects sera aussi de montrer comment on retrouve l'intérêt de l'approche numérique pour l'obtention d'un taux pour le problème continu, permettant de passer d'une estimation à temps discrets, à une estimation continue en temps, en reconnaissant une discrétisation de type schéma d'Euler.

Dans la seconde partie de l'exposé, on s'intéressera à l'obtention de schémas de discrétisation numérique de ces EDP en espace, en temps, et en temps et espace. L'exigence de précision sera d'obtenir des schémas pour lesquels les taux de décroissance de l'énergie des solutions associées sont du même ordre que ceux du modèle continu et sont uniformes par rapport aux paramètres de discrétisation du temps ou de l'espace.

Nous introduirons pour cela, une approche générale basée sur l'ajout de termes de viscosité numérique adaptés. Cette approche est connue dans le cas d'amortissement linéaire. Nous étendons cette stratégie aux cas d'amortissements non linéaires en utilisant la méthode de convexité avec poids-optimal, dans un cadre abstrait incluant de nombreuses EDP hyperboliques comme cas particuliers : équation de transport, équation des ondes, équation de Schrödinger, équations des plaques...