

# Algorithmes de type homotopiques pour la minimisation des moindres carrés régularisés par la “norme” $\ell_0$

**Charles SOUSSEN**, CRAN, Université de Lorraine et CNRS

**Jérôme IDIER**, IRCCyN, École Centrale Nantes et CNRS

**Junbo DUAN**, Université de Xi'an Jiaotong, Chine

**David BRIE**, CRAN, Université de Lorraine et CNRS

Cette communication concerne la conception d'algorithmes d'approximation parcimonieuse pour les problèmes inverses mal conditionnés. Les algorithmes heuristiques proposés sont conçus pour minimiser des critères mixtes  $\ell_2$ - $\ell_0$  du type  $\min_x \mathcal{J}(\mathbf{x}; \lambda) = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda\|\mathbf{x}\|_0$ . Ce sont des algorithmes gloutons “bidirectionnels” définis en tant qu'extensions d'*Orthogonal Least Squares* (OLS). Leur développement est motivé par le très bon comportement empirique d'OLS et de ses versions dérivées lorsque le dictionnaire  $\mathbf{A}$  est une matrice mal conditionnée. Nous présentons dans un premier temps l'algorithme *Single Best Replacement* (SBR) pour minimiser  $\mathcal{J}(\mathbf{x}; \lambda)$  à  $\lambda$  fixé [1], en mettant en avant ses propriétés de convergence. Nous proposons ensuite deux algorithmes permettant de minimiser  $\mathcal{J}$  pour un continuum de valeurs de  $\lambda$ , ce qui conduit à estimer le chemin de régularisation  $\ell_0$  [2]. Ces algorithmes sont inspirés de l'algorithme d'homotopie pour la régularisation  $\ell_1$  [3, 4] et exploitent le caractère constant par morceaux du chemin de régularisation  $\ell_0$ . *Continuation Single Best Replacement* (CSBR) est basé sur des appels à SBR pour des valeurs décroissantes de  $\lambda$ , calculées de manière adaptative. L'algorithme plus sophistiqué  *$\ell_0$ -regularization Path Descent* ( $\ell_0$ -PD) effectue une reconstruction (sous-optimale) du chemin de régularisation en maintenant (i) une liste de supports candidats pour des valeurs décroissantes de  $\lambda$ ; et (ii) une liste de valeurs critiques de  $\lambda$  autour desquelles la solution change. Les simulations numériques montrent l'efficacité des deux algorithmes pour des problèmes inverses difficiles comme la déconvolution impulsionnelle par un filtre passe-bas. Nous montrons finalement que les algorithmes proposés peuvent être avantageusement couplés avec des méthodes de sélection d'ordre comme le MDL (*Minimum Description Length*) afin de sélectionner automatiquement l'une des solutions parcimonieuses obtenues.

## Références

- [1] C. SOUSSEN, J. IDIER, D. BRIE et J. DUAN, *From Bernoulli-Gaussian deconvolution to sparse signal restoration*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 59, no. 10, pp. 4572-4584, oct. 2011.
- [2] C. SOUSSEN, J. IDIER, J. DUAN et D. BRIE, *Homotopy based algorithms for  $\ell_0$ -regularized least-squares*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 63, no. 13, pp. 3301-3316, juil. 2015.
- [3] B. EFRON, T. HASTIE, I. JOHNSTONE et R. TIBSHIRANI, *Least angle regression*, Ann. Statist., vol. 32, no. 2, pp. 407-499, avr. 2004.
- [4] D. L. DONOHO et Y. TSAIG, *Fast solution of  $\ell_1$ -norm minimization problems when the solution may be sparse*, IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 54, no. 11, pp. 4789-4812, nov. 2008.

**Charles SOUSSEN**, Université de Lorraine et CNRS. Centre de Recherche en Automatique de Nancy, UMR 7039, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy  
charles.soussen@univ-lorraine.fr

**Jérôme IDIER**, L'UNAM Université, Ecole Centrale Nantes et CNRS. Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes, UMR 6597, 44321 Nantes  
jerome.idier@ircryn.ec-nantes.fr

**Junbo DUAN**, Department of Biomedical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, Chine  
junbo.duan@mail.xjtu.edu.cn

**David BRIE**, Université de Lorraine et CNRS. Centre de Recherche en Automatique de Nancy, UMR 7039, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy  
david.brie@univ-lorraine.fr