Equation de Fokker-Planck pour un modèle de neuroscience

Delphine Salort, Université Pierre et Marie Curie

José Antonio Carrillo, Imperial College of London

Benoît Perthame, Université Pierre et Marie Curie

Didier Smets, Université Pierre et Marie Curie

Un des modèles les plus classiques pour décrire l'activité moyenne d'un réseau de neurones est celui de type Fokker Planck dans lequel le comportement des neurones est décrit à travers leur potentiel de membrane avec une dynamique de type Integrate and Fire et où les neurones interagissent entre eux à travers leur distribution statistique commune. On aboutit ainsi à une équation aux dérivées partielles de type Fokker Planck donnée par

$$\partial_t p + \partial_v[(-v + bN)p] - a\partial_v^2 p = \delta_{v=V_R} N(t),$$

$$N(t) = -a\partial_v p(t, V_F), \; p(t, V_F) = 0,$$

où $p(v,t)$ modélise la densité de neurones au temps t avec un potentiel de membrane $v \in (-\infty, V_F)$; où V_F représente le potentiel d'action; et où $V_R < V_F$ est le potentiel de retour des neurones après décharge. La fonction $N(t)$ correspond au flux de neurones qui déchargent à chaque instant t et b est un réel qui détermine la force des interconnexions entre les neurones.

Lorsque le réseau est excitateur ($b > 0$), les neurones qui déchargent ont pour effet d'augmenter de façon instantanée le potentiel de membrane des autres neurones avec une vitesse qui est proportionnelle à l'amplitude de stimulation globale du réseau. Le caractère auto-excitable de ces neurones, dans le cas de réseaux excitateurs, conduit à des phénomènes de blow-up dès que la proportion de neurones qui se trouve proche de leur potentiel d'action est trop grande [1], [2]. En revanche, lorsque la proportion de neurones qui se trouve proche de leur potentiel d'action est au départ suffisamment faible ou lorsque la force des interconnexions b est prise suffisamment petite par rapport à cette proportion, l'équation est bien posée globalement [3], [5], [4]. Lorsque le réseau est inhibiteur ($b < 0$), les neurones qui déchargent ont pour effet de diminuer le potentiel de membrane des neurones et l'équation toujours globalement bien posée [3], [4].

Nous présenterons plusieurs propriétés qualitatives et asymptotiques obtenues sur les solutions de cette équation et certains problèmes ouverts que soulève cette approche [4].

Références

[1] (MR2853216) [10.1186/2190-8567-1-7] M. J. Caceres , J. A. Carrillo and B. Perthame, Analysis of Nonlinear Noisy Integrate&Fire Neuron Models: Blow-up and steady states, *The Journal of Mathematical Neuroscience,* **1** (2011), 33pp.

[2] M. J. Caceres , and B. Perthame, Beyond blow-up in excitatory integrate and fire neuronal networks: refractory period and spontaneous activity, *Journal of Theoretical Biology* 2014 Jun 7;350:81-9

[3] José A. Carrillo, Maria d. M. Gonzlez, Maria P. Gualdani, Maria E. Schonbek, Classical Solutions for a nonlinear Fokker-Planck equation arising in Computational Neuroscience, *Comm. in Partial Differential Equations.* 38 (2013), pp. 385?409.

[4] José A. Carrillo, B. Perthame, D. Salort, D. Smets, Qualitative properties of solutions for the noisy integrate and fire model in computational neuroscience, *Nonlinearity.* 28, pp.3365 (2015)

[5] Franois Delarue, James Inglis, Sylvain Rubenthaler, and Etienne Tanré, Global solvability of a networked integrate-and-fire model of McKean?Vlasov type, *Ann. Appl. Probab.* Volume 25, Number 4 (2015), 2096-2133.

Delphine Salort, LCQB, Université Pierre et Marie Curie, 15 rue de l'école de médecine, 75005 Paris
`delphine.salort@upmc.fr`