

# Schémas numériques à mailles décalées d'ordre élevé pour les équations de Saint-Venant

Nicolas THERME, Aix-Marseille Université

L'objectif des travaux présentés ici est d'étudier une classe de schémas à mailles décalées pour les équations de Saint-Venant avec topographie qui satisfasse les propriétés suivantes : positivité de la hauteur d'eau, préservation des états d'équilibre et vérification d'une inégalité d'entropie. Il s'agit d'une extension des travaux présentés dans [2] et [1]. Les équations de Saint-Venant sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\partial_t h + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) &= 0, \\ \partial_t (h\mathbf{u}) + \nabla \cdot (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2}gh^2\right) &= gh\nabla z,\end{aligned}$$

avec  $h$  la hauteur d'eau,  $\mathbf{u}$  le champ de vitesse du fluide,  $z$  la topographie et  $g$  la constante de pesanteur. Le schéma est explicite en temps et la discrétisation spatiale est construite sur des maillages décalés : Les quantités scalaires sont définies au centre des cellules d'un premier maillage alors que les inconnues vectorielles de vitesse sont définies sur un maillage dual centré sur les faces du premier maillage. Les termes convectifs sont discrétisés suivant les techniques classiques des volumes finis. Les interpolations sur les faces du maillage primal et dual de la hauteur d'eau et de la vitesse respectivement, sont d'ordre élevé de type MUSCL. Ces interpolations permettent, sous condition de CFL faisant intervenir la vitesse matérielle, de garantir la positivité de la hauteur d'eau. L'opérateur de gradient qui apparaît dans le bilan de quantité de mouvement est construit comme le dual discret de la divergence et permet de garantir que le schéma préserve les états d'équilibre type lac au repos. Un bilan d'énergie cinétique discret avec des termes résiduels positifs est obtenu sur le maillage dual, à partir du bilan de quantité de mouvement et du bilan de masse. De façon similaire, un bilan d'énergie élastique discret avec termes résiduels est obtenu à partir du bilan de masse.

Le schéma ainsi construit est consistant au sens de Lax, toute suite convergente de solutions discrètes du schéma converge nécessairement vers une solution des équations d'une formulation faible de Saint-Venant. Un passage à la limite dans les bilans d'énergie discrets permet en outre de prouver que le schéma satisfait une inégalité d'entropie faible à la limite. Des simulations numériques sont proposées pour étayer l'ensemble de ces résultats.

## Références

- [1] N. THERME, *Schémas numériques pour la simulation de l'explosion*, Manuscrit de Thèse, 2015.
- [2] D. DOYEN ET H. P. GUNAWAN, *An Explicit Staggered Finite Volume Scheme for the Shallow Water Equations*, Finite Volumes for Complex Applications VII, Methods and theoretical aspects, 227-235, 2014.