Un résultat de stabilité pour l'interpolation oblique

Michel MEHRENBERGER, IRMA UMR 7501, Université de Strasbourg

Mots-clés : schémas semi-Lagrangiens, advection à coefficient constant, stabilité de Von Neumann, interpolation de Lagrange

Considérons l'équation d'advection linéaire $1D$ à coefficient constant,

$$\partial_t u(t,x) + c\partial_x u(t,x) = 0,\ u(t=0) = u_0(x)$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante. La solution exacte est donnée par $u(t,x) = u_0(x-ct)$. A partir de valeurs discrètes $u_i^0 = u_0(x_i)$ sur un maillage uniforme périodique x_i, la méthode semi-Lagrangienne consiste à mettre à jour la solution discrète $u_i^n \simeq u(n\Delta t, x_i)$ par la formule $u_i^{n+1} = \Pi_{(u_j^n)}(x_i - c\Delta t)$, où Π est un opérateur d'interpolation, c'est-à-dire une fonction vérifiant $\Pi_{(u_j^n)}(x_i) = u_i^n$.

L'étude de la stabilité en norme L^2 pour l'interpolation de Lagrange centrée de degré impair $2d+1,\ d \in \mathbb{N}$ revient à montrer que le facteur d'amplification, défini par

$$\rho(\omega,\alpha) = \sum_{k=-d}^{d+1} L_k(\alpha)\exp(ik\omega),\ L_k(\alpha) = \prod_{j=-d,\ j\neq k}^{d+1} \frac{\alpha - j}{k-j},\ 0 \le \alpha \le 1,\ \omega \in \mathbb{R}$$

est de module ≤ 1. Ce résultat a été établi initialement par G. Strang [1], avec un résultat analogue pour l'interpolation de degré pair. B. Després [2] a montré que dans le cas du degré impair, on récupère aussi la stabilité en norme $L^q, q \ge 1$, cela n'étant pas vrai pour le degré pair. R. Ferretti [3] établit une équivalence entre schémas semi-Lagrangiens et schémas de Lagrange-Galerkin, à nouveau dans le cas du degré impair (preuve symbolique vérifiée jusqu'au degré 13) et cela lui permet d'étendre la stabilité de la méthode semi-Lagrangienne à des cas d'advection à coefficients non constants. A nouveau, l'équivalence n'est pas valable pour le degré pair. Vu ces résultats, l'interpolation de Lagrange de degré impair bénéficie ainsi d'une meilleure propriété de stabilité.

Dans un travail en cours, commun avec Y. Güclü, G. Latu, M. Ottaviani et E. Sonnendrücker, nous étudions une variante de la méthode semi-Lagrangienne qui utilise une interpolation oblique (contexte 2D) pour mieux suivre la solution qui a tendance à s'aligner à la direction oblique (au moins en première approximation et pour des modèles suffisamment simples) du champ magnétique (voir [4] pour une première version).

L'étude théorique de la stabilité en norme L^2 nous permet alors de découvrir une propriété plus forte de stabilité (non sans lien avec les travaux de Ferretti), valable pour le degré impair, qui permet de résister à la variante oblique du schéma, ce qui n'est à nouveau pas le cas pour le degré pair.

Références

[1] G. Strang, *Trigonometric polynomials and difference methods of maximum accuracy*, J. Math. Phys 41 147–520, 1962.

[2] B. Després, *Uniform asymptotic stability of Strang's explicit compact schemes for linear advection*, SIAM J. Numer. Anal. 47(5) 3956–3976, 2009.

[3] R. Ferretti, *On the relationship between Semi-Lagrangian and Lagrange-Galerkin schemes*, Numerische Mathematik 124(1) 31–56, 2013.

[4] G. Latu, M. Mehrenberger, M. Ottaviani, E. Sonnendrücker, *Aligned interpolation and application to drift kinetic semi-Lagrangian simulations with oblique magnetic field in cylindrical geometry*, hal-01098373 version 1, 2014.

Michel MEHRENBERGER, Institut de Recherche Mathématique Avancée UMR 7501, Université de Strasbourg, 7 rue René Descartes, F-67084 Strasbourg
`mehrenbe@math.unistra.fr`