Contrôlabilité partielle des systèmes paraboliques

Michel DUPREZ, Laboratoire de Mathématiques de Besançon

Farid AMMAR KHODJA, Laboratoire de Mathématiques de Besançon

Franz CHOULY, Laboratoire de Mathématiques de Besançon

Cet exposé sera consacré à l'étude de la contrôlabilité partielle des systèmes paraboliques linéaires avec moins de contrôles que d'équations (voir [1]). Pour un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$), considérons le système de n équations contrôlé par m contrôles ($m < n$) suivant

$$\begin{cases} \partial_t y = \Delta y + Ay + B1_\omega u & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ y(\cdot,0) = y_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $A(t,x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $B(t,x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$. La question est la suite : est-il possible de trouver un contrôle u tel que les p premières composantes ($p < n$) de la solution y du système (1) soit nulles (ou proche d'une cible donnée) à l'instant T.

Le premier résultat que nous présenterons est, d'une part, une condition nécessaire et suffisante de type *Kalman* lorsque les matrices de couplage et de contrôle sont constantes en temps et en espace et, d'autre part, une condition suffisante pour des matrices qui dépendent du temps. Nous donnerons ensuite des résultats positifs et négatifs de contrôlabilité partielle à zéro pour le système

$$\begin{cases} \partial_t y_1 = \partial_{xx} y_1 + \alpha(x) y_2 + 1_\omega u & \text{dans } (0,\pi) \times (0,T), \\ \partial_t y_2 = \partial_{xx} y_2 & \text{dans } (0,\pi) \times (0,T), \\ y_1(0,\cdot) = y_1(\pi,\cdot) = y_2(0,\cdot) = y_2(\pi,\cdot) = 0 & \text{sur } (0,T), \\ y_1(\cdot,0) = y_1^0,\ y_2(\cdot,0) = y_2^0 & \text{dans } (0,\pi), \end{cases} \tag{2}$$

où le coefficient α ne dépend que de l'espace. Nous verrons que les notions de contrôlabilité partielle à zéro et approchée d'un système parabolique peuvent ne pas être équivalentes, contrairement au cas scalaire. Pour finir, nous expliquerons le lien entre contrôlabilité partielle et certains problèmes de contrôle optimal ce qui nous permettra d'illustrer numriquement quelques résultats.

Références

[1] F. Ammar-Khodja, F. Chouly et M. Duprez, *Partial null controllability of parabolic linear systems*, Mathematical Control and Related Fields (MCRF) - AIMS, 2016.

Michel DUPREZ, Laboratoire de Mathématiques de Besançon, 16, route de Gray, 25030 Besançon Cedex
michel.duprez@univ-fcomte.fr
Farid AMMAR KHODJA, Laboratoire de Mathématiques de Besançon, 16, route de Gray, 25030 Besançon Cedex
farid.ammar-khodja@univ-fcomte.fr
Franz CHOULY, Laboratoire de Mathématiques de Besançon, 16, route de Gray, 25030 Besançon Cedex
franz.chouly@univ-fcomte.fr