Un nouvel indicateur d'erreur *a posteriori* pour la BEM en acoustique 2D et 3D

Marc BAKRY, ONERA/DTIM/M2SN & ENSTA/POEMS

Sébastien PERNET, ONERA/DTIM/M2SN

La méthode des éléments finis de frontière (BEM) est un outil basé sur les formulations intégrales pour la résolution de problèmes de propagation d'onde. On s'intéresse ici à la diffraction d'une onde acoustique par un objet de surface Γ. L'équation de propagation associée est l'équation de Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

à laquelle on va associer des conditions limite de rayonnement à l'infini est une condition limite sur la surface de l'objet diffractant. Les formulations intégrales permettent alors de passer d'une équation posée dans tout l'espace à une équation posée sur Γ. Elles ont encore l'avantage de prendre intrinsèquement en compte la condition de rayonnement tout en étant plus précises. En contrepartie, cela nécessite la manipulation de matrices pleines et s'accompagne d'une grande difficulté de mise en œuvre.

Malgré des avantages certains, il n'y a que peu d'outils efficaces, fiables, automatiques permettant le contrôle de l'erreur numérique pour la BEM. On appelle de tels outils *indicateurs d'erreurs a posteriori* η. Ils s'expriment généralement comme norme de grandeurs calculables à partir de la solution numérique u_h et des données du problème. On impose trois propriétés sur η : il doit être *fiable* et *efficace* i.e. $\exists\{C_{\mathrm{rel}}, C_{\mathrm{eff}}\}$, $C_{\mathrm{ref}}\,\eta \leq \|e := u - u_h\| \leq C_{\mathrm{rel}}\,\eta$, mais aussi *local* au sens où l'erreur doit pouvoir être calculée localement sur les éléments τ du maillage $\mathcal{T}_h$. Dans ce cas, on a un contrôle complet de e et η peut être utilisé dans une boucle de raffinement autoadaptatif afin de garantir la qualité de simulations numériques effectuées par BEM. Un tel algorithme mesure après calcul l'erreur locale, effectue un tri des éléments selon un critère à définir par l'utilisateur, raffine les éléments marqués, puis on itére la résolution sur le nouveau maillage.

La BEM fait intervenir quatre opérateurs "de base" à inverser : le *simple couche* $\mathcal{S}_k$, le *double couche* (et son adjoint), la dérivée normale du double couche $\mathcal{N}_k$. On s'intéresse plus particulièrement à $\mathcal{S}_k : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$ et $\mathcal{N}_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma)$. Dans les espaces de Sobolev d'ordre non entier, les normes ne sont *pas locales* et on doit alors utiliser des techniques de localisation basées sur des estimations inverses. Si on prend $\mathcal{S}_k$, un indicateur est $\eta_{r_h} = \|h^{1/2}\nabla_\Gamma r_h\|_{L^2}$ avec $r_h \in H^{1/2}(\Gamma)$ le résidu. Malheureusement, ces techniques ne permettent pas d'estimer avec précision $C_{\mathrm{rel/eff}}$ et peuvent mener à des mesures erronées de l'erreur. On propose alors d'introduire une nouvelle technique de localisation qui permet un contrôle de ces constantes. On pose maintenant $\|\,.\,\|$ une norme équivalente de l'erreur dans $H^{\pm 1/2}(\Gamma)$ et nous aimerions nous assurer que $C_{\mathrm{rel/eff}}$ est constante quelque soit le problème considéré.

On introduit un opérateur $\Lambda^{\mathcal{S}_k/\mathcal{N}_k} : H^{\pm 1/2}(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$. On pose alors $\eta_\Lambda = \|\Lambda r_h\|_{L^2}$. Si Λ est un isomorphisme, alors on obtient directement que η_Λ est un indicateur *fiable*, *efficace* et *local*. On prétend de plus qu'en choisissant Λ avec attention, alors on a

$$\eta_\Lambda = \|e\| + o(\|e\|)$$

soit encore $C_{\mathrm{eff}} = 1$ pour toute surface Γ. Ces opérateurs peuvent être "aisément" calculés grâce au calcul symbolique. De plus, ils sont faciles à mettre en œuvre et relativement peu coûteux. Enfin, la combinaison des trois propriétés requises permet de l'inclure dans un algorithme de raffinement autoadaptatif.

Références

[1] C. Carstensen, D. Praetorius, *Averaging techniques for the effetivenumerical solution of Symm's integral equation of the first kind*, SIAM J. Sci. Comp., Vol.27, No. 4, pp. 1226-1260, 2006.

[2] C. Carstensen, D. Praetorius, *Averaging techniques for the a posteriori BEM error control for a hypersingular integral equation in two dimensions*, SIAM J. Sci. Comp., Vol. 29, No. 2, pp. 782-810, 2007.

Marc BAKRY, ONERA/DTIM/M2SN, 2 avenue Edouard Belin, 31055 Toulouse CEDEX 4, France
marc.bakry@onera.fr